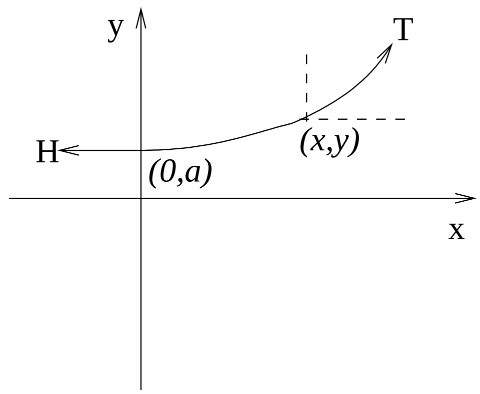
懸垂線(Catenary)

電線在兩電線桿之間懸垂成一曲線, 這樣的曲線稱為懸垂線, 我們要導出它的方程式



如圖, 我們選懸垂線的最低點的法線方向為y軸, 最低點的坐標為$(0,a)$, 在此處的(水平)張力為H. 考慮曲線上任一點(x,y), 其張力T在切線方向. 設T與x軸的夾角為ψ, 則$\frac{dy}{dx}=\tan\psi$. 假定電線是均質的, 密度為ρ(每單位長度), 則電線從$(0,a)$到(x,y)的重量為 ρs,

$$s=\int_0^x\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$$

而ρs要由T在垂直方向的分力$T\sin\psi$來平衡: $\rho s=T\sin\psi$; 另外在水平方向又有$H=T\cos\psi$. 兩者相除, 得$\frac{\rho}{H}s=\tan\psi$, 亦即

$$\frac{\rho}{H}\int_0^x\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx=\frac{dy}{dx}$$

兩邊對x微分, 得

$$\frac{\rho}{H}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

令$m=\frac{dy}{dx}$, $m'=\frac{d^2y}{dx^2}$, 則上式可寫成為 $\frac{\rho}{H}\sqrt{1+m^2}=m'$. 因此

$$\int\frac{m'}{\sqrt{1+m^2}}dx=\int\frac{\rho}{H}dx=\frac{\rho}{H}x+C_1$$

另一方面, 用不定積分的技巧, 可得

$$\int \frac{m'}{\sqrt{1+m^2}}dx = \int \frac{dm}{\sqrt{1+m^2}} = \ln(\sqrt{1+m^2}+m)$$

因此得

$$\ln(\sqrt{1+m^2}+m) = \frac{\rho}{H}x + C_1$$

但因$x=0$時$m=0$, 由此確定$C_1=0$. 取指數, 解出m, 得

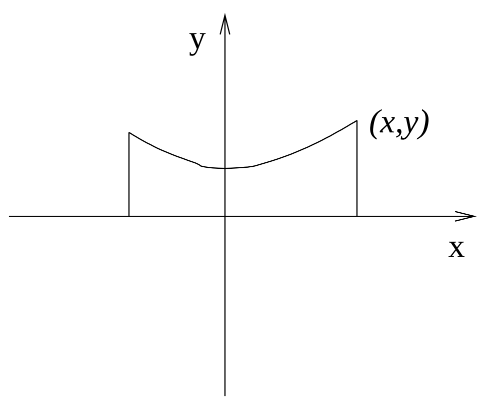
$$\frac{dy}{dx} = m = \frac{1}{2}(e^{\frac{\rho}{H}x} - e^{-\frac{\rho}{H}x})$$

兩邊積分, 就得

$$y = \frac{H}{\rho}\cdot\frac{1}{2}(e^{\frac{\rho}{H}x} + e^{-\frac{\rho}{H}x}) + C_2$$

我們可以選適當的x軸, 便得$C_2=0$, 而又因$x=0$時, $y=a$, 所以$a=\frac{H}{\rho}$. 因此

$$y = a\cdot\frac{1}{2}(e^{\frac{\rho}{H}x} + e^{-\frac{\rho}{H}x}) = a\cosh\frac{x}{a}$$



(取材自曹亮吉主編微積分, 歐亞書局出版)