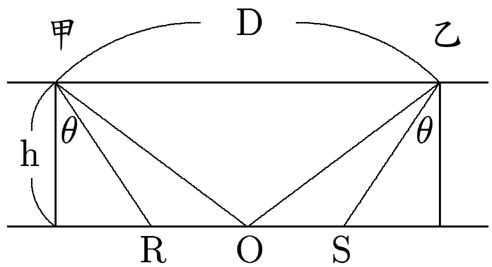
用震波來測量地層

地表有一厚度固定的地層A, 其下為地層B, 假設震波在A中前進的速率為V_1, 在B中為V_2, 若$V_2 > V_1$, 我們可以藉由測量震波來得知V_1, V_2以及地層A的厚度h.



解:在地表選定甲、乙兩點, 距離為D, 若在甲處釋放一震波, 則震波傳送到乙的方式有以下3種, 透過測量這三種震波從甲到乙所花的時間T_1, T_2, T_3可以求出V_1, V_2, h.

1. 沿著地表傳送到乙, 所需時間為$T_1 = \frac{D}{V_1}$,
2. 從甲出發, 在A, B的交界處O反射而到乙, 所需時間為 $T_2 = \frac{2\sqrt{h^2+(\frac{D}{2})^2}}{V_1}$
3. 從甲出發, 到達A, B的交界處R散射, 沿著A, B的交界處前進, 到達某點S, 再散射到乙.

這樣的路線中有一條所花費的時間最少, 此一路線在O的兩側會對稱, 考慮此種對稱的路線, 如圖所示, 則走此種路線所花費的時間

$$T(\theta) = 2\left(\frac{\frac{h}{\cos\theta}}{V_1} + \frac{\frac{D}{2} - h\tan\theta}{V_2}\right) = \frac{\frac{2h}{\cos\theta}}{V_1} + \frac{D - 2h\tan\theta}{V_2}$$

對θ取導數, $T'(\theta) = 2h\cdot\sec^2\theta(\frac{\sin\theta}{V_1} - \frac{1}{V_2})$. 當$\theta = \sin^{-1}(\frac{V_1}{V_2})$時, $T'(\theta) = 0$. 當$\theta < \sin^{-1}(\frac{V_1}{V_2})$時, $\sin\theta < \frac{V_1}{V_2}$, $T'(\theta) < 0$. 當$\theta > \sin^{-1}(\frac{V_1}{V_2})$時, $\sin\theta > \frac{V_1}{V_2}$, $T'(\theta) > 0$. 所以$T(\theta)$在$\sin\theta = \frac{V_1}{V_2}$時有最小值$T_3 = \frac{D}{V_2} + 2h\frac{\sqrt{V_2^2-V_1^2}}{V_1V_2}$, 在此可看出$\frac{D}{2}$必須大於$h\cdot\tan\theta = h\frac{V_1}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}}$. 也可看出為什麼要限制$V_2 > V_1$, 否則$T(\theta)$的最小值便是從甲到$O$再到乙所花的時間$T_2$, 便得不到和$V_2$有關的數據$T_3$.

在甲處釋放震波後, 在乙處可測得這三種震波到達乙所花的時間, 該怎麼判別那個時間是那個震波抵達呢? 首先$T_1 < T_2$, $T_3 < T_2$, 而T_1和T_3間的大小不一定, 有以下關係

$$\begin{cases} T_1 > T_3 & : & \frac{D}{2} > h \cdot \frac{V_1+V_2}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}} \\ T_1 = T_3 & : & \frac{D}{2} = h \cdot \frac{V_1+V_2}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}} \\ T_1 < T_3 & : & h \cdot \frac{V_1+V_2}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}} > \frac{D}{2} > h \cdot \frac{V_1}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}} \cdots (*) \end{cases}$$

選取適當的D使得$(*)$成立, 便有$T_1 < T_3 < T_2$, 便可判別T_1, T_2, T_3. 這樣的D怎麼選呢? 一開始任取一段距離D_0, 若此時只測得到2個震波($\frac{D_0}{2} \leq h\frac{V_1}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}}$), 便將距離放大兩倍得$D_1$, 若能測得3個震波, 則$h \cdot \frac{V_1+V_2}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}} > h \cdot \frac{2V_1}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}} \geq D_0 = \frac{D_1}{2} > h \cdot \frac{V_1}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}}$, $(*)$式成立, 可判別T_1, T_2, T_3, 若依然只測得2個震波, 重複同樣步驟即可.

若在距離為D_0時能測得3個震波, 取$D_1 = \frac{D_0}{2}$, 若在距離D_1時只測得2個震波, 可知D_0滿足$(*)$式, 取D_0為距離即可, 若在距離D_1處仍測得3個震波, 重複同樣步驟.

所以我們可以選取適當的D, 測出T_1, T_2, T_3, 而

$$\begin{cases} T_1 & = & \frac{D}{V_1} \\ T_2 & = & \frac{2\sqrt{h^2+(\frac{D}{2})^2}}{V_1} \\ T_3 & = & \frac{D}{V_2} + 2h \cdot \frac{\sqrt{V_2^2-V_1^2}}{V_1 V_2} \end{cases}$$

可解出V_1, V_2, h.