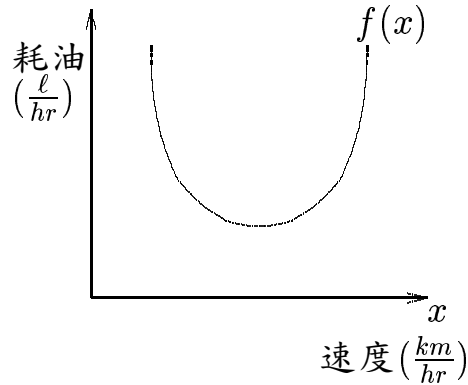


## 省油問題

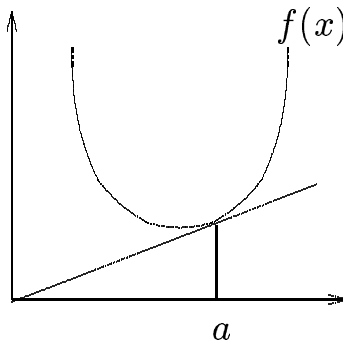
汽車在行駛的時候，速率不同耗油的情形也會有所不同，一般來說速度過低或過高都會產生不必要的耗油，若有一台汽車器速度(公里/小時)與耗油(公升/小時)的關係，如圖所示，請問這台車該以什麼速度行駛才會最省油呢？



解:若要省油，則每單位距離所消耗的油越少越好，假設速度 $x$ 時，耗油為 $f(x)$ ，若汽車以固定速率 $x$ 行駛 $L$ 公里，則所需時間為 $\frac{L}{x}$ ，總耗油為 $\frac{L}{x} \cdot f(x)$ ，所以每單位距離所耗的油為 $\frac{f(x)}{x}$ ，欲求 $\frac{f(x)}{x}$ 的最小值，對 $\frac{f(x)}{x}$ 取導數，

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x^3}$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ ， $f'(x)$ 表示圖形在 $x$ 點的切線斜率， $\frac{f(x)}{x}$ 表示圖形上該點與原點連線的斜率， $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ 表示在此點的切線通過原點，設此時 $x = a$ ，當 $x > a$ 時， $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ ， $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' > 0$ 。當 $x < a$ 時， $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ ， $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' < 0$ ，所以 $x = a$ 時 $\frac{f(x)}{x}$ 有最小值



由圖形上來看的話，從原點對 $f(x)$ 的圖形作切線，所得切點的 $x$ 座標就是 $a$ 。