兩個無理數的證明

在BBS的math板中，常常會看到有人問：為什麼 e 是無理數? π 是無理數嗎? 這類的問題，現在，在這裡給個解答:

<u>e是無理數</u>:
假設$e=\frac{q}{p}$, $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$,
$2<e<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots=3$, 所以$e$不是整數, $p>1$

$$\begin{aligned} p!(e-1-1-\tfrac{1}{2!}-\cdots-\tfrac{1}{p!}) &= p!(\tfrac{1}{(p+1)!}+\tfrac{1}{(p+2)!}+\tfrac{1}{(p+3)!}+\cdots) \\ &= \tfrac{1}{p+1}+\tfrac{1}{(p+1)(p+2)}+\tfrac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}+\cdots \\ &< \tfrac{1}{p+1}+\tfrac{1}{(p+1)(p+2)}+\tfrac{1}{(p+2)(p+3)}+\cdots \\ &< \tfrac{2}{p+1}<1 \end{aligned}$$

但是$p!(e-1-1-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{p!})\in\mathbb{N}$, 所以$e$是無理數.

<u>π是無理數</u>:
假設$\pi=\frac{q}{p}$, $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$,
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(p\pi^2)^n}{n!}$收斂 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(p\pi^2)^n}{n!}=0\Rightarrow\exists N$ 使得 $\frac{(p\pi^2)^N}{N!}<\frac{1}{4}$
令$f(x)=\frac{1}{N!}x^N(q-px)^N=\frac{p^N}{N!}x^N(\pi-x)^N$,

$$0<\int_0^\pi f(x)\sin x dx<\int_0^\pi \frac{p^N}{N!}\pi^{2N}dx=\frac{(p\pi^2)^N}{N!}\pi<\frac{\pi}{4}<1\cdots\cdots(1)$$

但是$f(x)$在原點的任意次導數均為整數, 即$f^{(k)}(0)\in\mathbb{Z}$, 又$f(\pi-x)=f(x)$, 所以 $f^{(k)}(\pi-x)=(-1)^k f^{(k)}(x)$; 因此$f^{(k)}(\pi)\in\mathbb{Z}$
令$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^N f^{(2N)}(x)$, 因為

$$\frac{d}{dx}(F(x)\cos x-F'(x)\sin x)=-(F(x)+F''(x))\sin x=-f(x)\sin x$$

則

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx=[F'(x)\sin x-F(x)\cos x]_0^\pi=F(\pi)+F(0)\in\mathbb{Z}\cdots\cdots(2)$$

由(1)(2)得到矛盾, 因此π是無理數