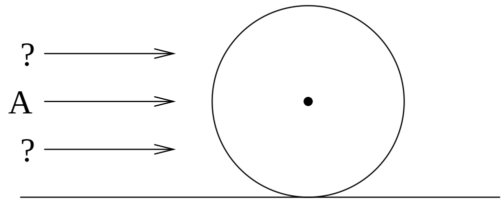
撞球問題



問: 球桿應打在何處會最好?

觀察1: 如果球桿打在撞球的中央(如圖A處), 則球有速度, 但是無旋轉的角速度, 如此一來球和布會有摩擦, ⇒ 布會壞掉, 可見這不是最佳的點.
◎球桿應打在讓球產生全滾動而不滑動, 這是最佳的點.

觀察2: 若球一開始有滑動, 不久球會開始滾動, 滾速會增加,移動速度會減少, 而質心速度會增加, 到最後會有$V_{cm} = \omega R$, 即滾動而不滑動, 而摩擦力會消失.

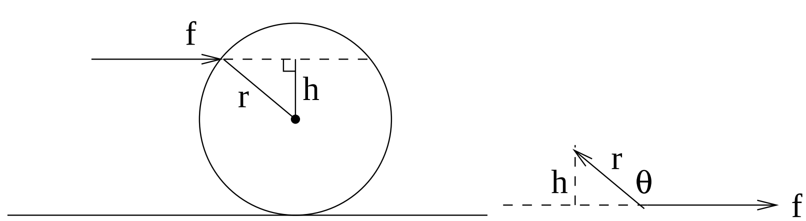
一些記號: V_{cm} : 球的質心速度
ω:球轉動的角速度
R : 球的半徑
I_{cm}: 球的轉動慣量
M: 球的質量

由物理學的角度來看, 一剛性物體的角動量變化率等於力矩之和, 寫成數學式即為$\frac{dL}{dt} = \tau$, 另外, 角動量等於物體的轉動慣量乘上角速度, 也就是說$L = I\omega$, 於是, 用到撞球的例子上即為:

$$L = I_{cm} \cdot \omega = \int \tau(t)dt = h \int f(t)dt = hMV_{cm}$$

注:

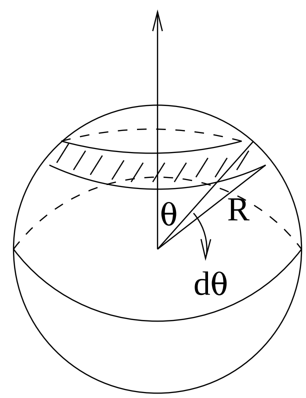
1. 因為撞球的滾動是以貫穿球心的軸而轉動, 所以其轉動慣量為I_{cm}(質心)
2. 力矩 $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{f}$, 其中$\overrightarrow{r}$是轉動軸到施力點的方向向量, 如果只關心力矩的大小, 則$\tau = r_{\perp} f = r \sin\theta \cdot f = hf$



3. 要達到全滾動而不滑動, 則$\int f(t)dt$, 動量的變化率最後必須全部轉變為MV_{cm}, 瞬間達成.

所以$I_{cm}\cdot\omega = hMV_{cm} = hM\omega R \Rightarrow h = \frac{I_{cm}\cdot\omega}{M\omega R} = \frac{I_{cm}}{MR}$ 最後, 計算出I_{cm}的值:

1. 先計算空心球殼的轉動慣量:



$r_\perp = R\sin\theta$ (球殼上的點到軸的距離)

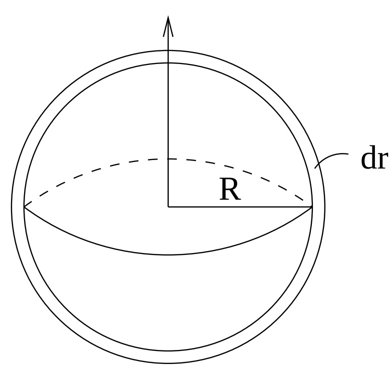
$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{4\pi R^2}$ (均勻球殼, 質量與面積成正比)

$dA = 2\pi r_\perp R d\theta, \therefore dm = \frac{2\pi r_\perp RM}{4\pi R^2}d\theta.$

$\therefore I = \int_0^\pi r_\perp^2 dm = \int_0^\pi \frac{M}{2R} r_\perp^3 d\theta = \int_0^\pi \frac{MR^2}{2}\sin^3\theta d\theta$

$= -\int_0^\pi \frac{MR^2}{2}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta = -\frac{MR^2}{2}(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta)|_0^\pi = \frac{2}{3}MR^2$

2. 計算實心球殼的轉動慣量:

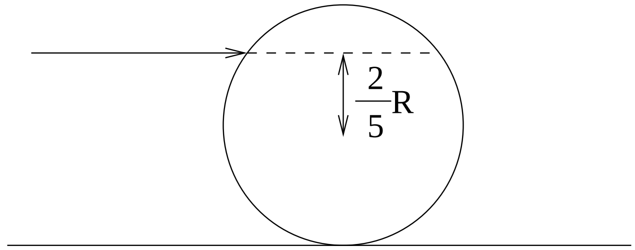


對球殼r, 從O到R積分: $dI = \frac{2}{3}dmr^2$, 而

$\frac{dm}{M} = \int dI = \int_0^R \frac{2}{3}dmr^2 = \frac{2}{3}\int_0^R \frac{3Mr^4dr}{R^3}$

$= \frac{2M}{R^3}\int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5}MR^2$

所以$h=\frac{I_{cm}}{MR}=\frac{2}{5}R$ 結論: 球桿應打在距球心高$\frac{2}{5}R$處為最佳.



補充:為何滾動而不滑動的時候會有$V_{cm}=\omega R$? $\because$滾動而不滑動 $\therefore$質心的位移等於弧長 $\Rightarrow s=R\theta, \Rightarrow V_{cm}=\frac{dS}{dt}=\frac{Rd\theta}{dt}=R\omega$