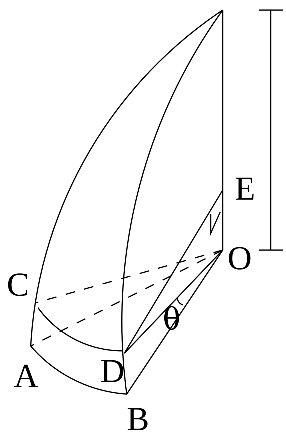
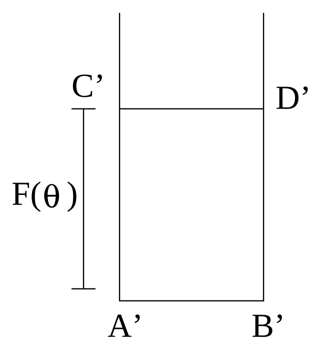
Mercator地圖

Mercator地圖是由G. Mercator在1569年所提出的. 至今在航海上仍廣為使用, 在Mercator地圖中, 經度差相同的經線被攤開為平面上距離相同的平行線. 而緯線在地圖上為與經線垂直的直線, 而且Mercator 地圖在水平方向和垂直方向的縮收比例一樣. 圖一為地球的一部分, AB為赤道, CD為緯度為θ的緯線, 假設地球為半徑為1, 圖二為地球的 Mercator地圖, A', B', C', D'分別對應A, B, C, D. 若$\widehat{AB} = \overline{A'B'}$, 則$F(\theta)$=?

圖一



圖二



解: $\widehat{AB} : \widehat{CD} = \overline{BO} : \overline{DE} = 1 : \cos\theta$, $\overline{C'D'} : \widehat{CD} = \overline{A'B'} : \widehat{AB} \cdot \cos\theta = 1 : \cos\theta$

$\therefore\ \overline{C'D'} = \widehat{CD} \cdot \sec\theta$. 緯度$\theta$時, 地圖水平與垂直上的縮放率為$\sec\theta$,

$F(\theta) + \Delta\theta \cdot \sec\theta \le F(\theta + \Delta\theta) \le F(\theta) + \Delta\theta \cdot \sec(\theta + \Delta\theta)$

$\therefore F(\theta + \Delta\theta) = F(\theta) + \Delta\theta \cdot \sec(\theta + k\Delta\theta)$, $k \in [0, 1]$(中間值定理)

$\frac{F(\theta+\Delta\theta) - F(\theta)}{\Delta\theta} = \sec(\theta + k\Delta\theta)$, 當$\theta \to 0$時,

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{F(\theta + \Delta\theta) - F(\theta)}{\Delta\theta} = F'(\theta) = \sec\theta$$

$\therefore F(\theta) = \int_0^\theta \sec t \cdot dt + c$. 又$F(0) = 0$, 所以$c = 0$,

$$\Rightarrow F(\theta) = \int_0^\theta \sec t \cdot dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}\right)$$

, 當$\theta \to \frac{\pi}{2}$, $F(\theta) \to \infty$. 這表示Mercator地圖無法在有限的紙上畫出完整的地球. 而緯度θ時縮放比例為$\sec\theta$, $\sec\theta$為遞增函數. 這說明Mercator地

圖在緯度越高時失真的情形便越嚴重. 另外值得一提的是, 將地球投影至Mercator地圖上其實是一個保角變換, 所謂保角, 指的是任兩條曲線的夾角經變換後仍保持不變. 正由於Mercator地圖保持角度, 使得其在航海上有一重要的應用. Mercator地圖上的直線在地球上對應的曲線一般稱為斜駛線 (Loxodromic Curve)或羅盤方位線. 由於Mercator地圖上的直線與經線皆保持固定夾角, 所以斜駛線與經線的夾角也保持固定. 如果欲從地球上的A點航行到B點, 可先找到 A, B在Mercator地圖上對應的A', B', 若地圖上的直線$\overline{A'B'}$與經線的夾角為 θ, 則在航行時只要將羅盤角度固定與經線一直保持θ角, 便可以從A沿著斜駛線到達B了. 雖然斜駛線一般來說並不是最短距離, 但沿著斜駛線行駛卻是個不易迷路的好方法.

附註: 根據岩波數學辭典260.D條, 如果球面半徑為1, 經度是ϕ, 緯度是θ, 則Mercator map:

$$(\phi,\theta) \to x = \phi, y = \ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$$

因此, $dx^2 + dy^2 = d\phi^2 + \sec^2\theta d\theta^2 = [d\theta^2 + \cos^2\theta d\phi^2]\sec^2\theta$是保角變換.