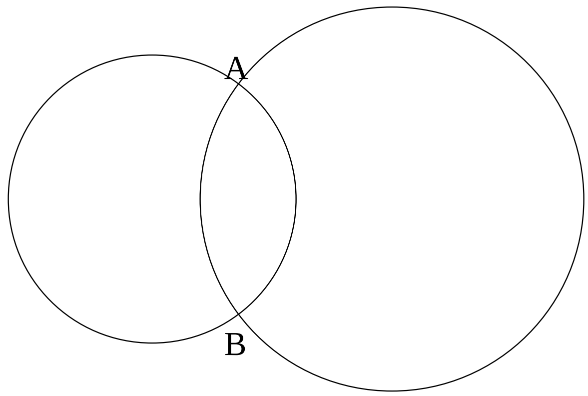
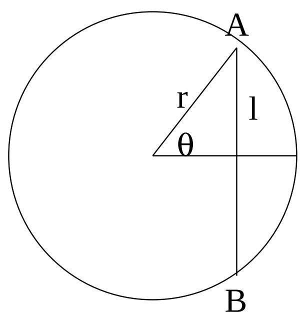
兩圓相交決定的弧長

平面上大小兩個圓相交於A, B兩點, 則對A, B在兩個圓上所決定的弧來說, 小圓上弧的弧長大於大圓上弧的弧長.

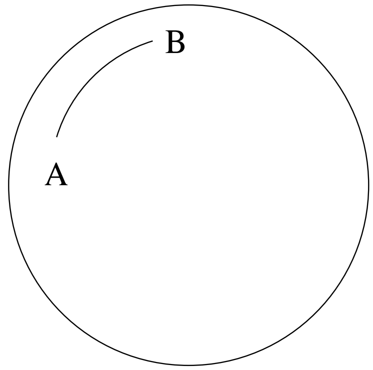


解: 考慮一個更一般的問題, 對一固定長2ℓ任何半徑$r \geq \ell$的圓皆可在圓內找到長為 2ℓ的弦, 此弦所對應的弧之弧長$f(r) = 2r\theta = 2r \cdot \sin^{-1} \frac{\ell}{r}$, $f(r)$為r的遞減函數$(r \geq \ell)$. 若知此一結果, 則原題目便可得證.



現在證明$f(r)$ 為r的遞減函數, $\because$ $f'(r) = 2\sin^{-1}\frac{\ell}{r} - \frac{2\ell}{\sqrt{r^2-\ell^2}}, (r > \ell)$, $f''(r) = \frac{2\ell}{\sqrt{1-(\frac{\ell}{r})^2}}(\frac{1}{r^2-\ell^2} - \frac{1}{r^2}) \geq 0, (r > \ell)$, 所以$f'(r)$在$r > \ell$時為遞增. 又 $\lim\limits_{r\to\infty} f'(r) = 0, \therefore f'(r) < 0, \forall r > \ell, \Rightarrow f(r)$在$r \geq \ell$為遞減函數.

有了這個性質, 我們可以再看另一個問題, 球面上有A, B兩點, 若從A點出發, 在球面上沿一圓弧走到B, 要走那條圓弧才能使所走路徑最短呢?



對這些圓弧來說, 所對應的弦皆為$\overline{AB}$. 若弧長要越短, 則半徑要越長, 而球上半徑最長的圓為截平面通過球心的圓, 所以A到B最短的圓弧為球心, A, B三點所在平面在球上所截出來的弧, 此弧稱為由A到B的測地線 (geodesic) 事實上, 測地線不只是在所有圓弧中長度最短, 在球面上所有A到B的曲線中, 測地線仍是長度最短的, 也因此, 測地線可看成是球面上的直線.