陳宜良 99.12.10

數學 I 釋疑

1. 1.2 節中談絕對值方程式與不等式是否要談絕對值函數？

答：數線上的幾何問題可以用距離觀念來處理，不需用絕對值函數的觀念。以南一中今年第一次段考考題為例：

試問 $|X-1|+|X-3|=2$ 的解有幾個？ 此問題可以有下面的方法處理：

(1)用距離觀念處理

(2)將 R 切割成$(-\infty,1),(1,3),(3,\infty)$三個不同區間,再以去絕對值的方式處理

(3)用絕對值函數處理

第(3)的處理方法在高一上是不合適的。因為此時尚未講一次函數，如何能清楚交待絕對值函數呢？

2. 為何要學插值多項式？

答：

(1)為建立函數圖形與其代數式的連結，在 2.1 節中以描點方式繪一次、二次以及單項式函數的概略圖形，在 2.2 節中則要學給幾個點，找出其對應的插值多項式。

(2)牛頓插值多項式可與餘式定理連結，拉格朗日多項式可與因式定理連結，因此，插值多項式的題材提供了多項式除法的應用。

(3) 一次的插值多項式可與分點公式連結，也與指對數函數、三角函數之查表學習連結。

(4) 觀測的數據通常是離散的，在應用上常常以多項式函數連接起來。

3.如何將牛頓插值多項式與餘式定理作連結？

答：讓我們舉個例子，求通過$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$的二次式 $y=f(x)$。

由餘式定理得 $f(x)=y_0+g(x)(x-x_0)$，其中 g 為一次式。此時已用了(x_0,y_0)這個條件。如果將$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$代入，可得 $g(x_1), g(x_2)$。因此透過餘式定理，可以將原二次插值多項式問題降為一次插值多項式問題。如果再用一次餘式定理在$(x_1,g(x_1))$上，可得 $g(x)=g(x_1)+c(x-x_1)$，其中 c 為常數，再將$(x_2,g(x_2))$代入可得 c。

我們也可以將上述方法整合成以下的未定係數法：由餘式定理得

$$f(x)=a+g(x)(x-x_0)=a+b(x-x_0)+c(x-x_0)(x-x_1)，$$

再將 $f(x_i)=y_i$，$i=0,1,2$ 代入，可求得 a,b,c 的係數。

由上面的作法可知，透過除法，可以將插值多項式問題降階，這凸顯了除法的化

繁為簡的功能。

4.如何將拉格朗日插值多項式與因式定理做連結？

答：我們先定義所謂的「拉格朗日基底函數」，它是形如 $c(x-x_1)\cdots(x-x_n)$的多項式。由因式定理知，在 $x_1,\cdots,x_n$ 點的值為 0 的 n 次多項式就是這種型式。一般通過 x_0,x_1,x_2 之插值多項式可用未定係數法表成：

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)+a_1(x-x_0)(x-x_2)+a_2(x-x_0)(x-x_1)。$$

再代入 yi=f(xi), i=0,1,2 可求得係數 ai。因此，拉格朗日基底函數可與因式定理連結，而一般插值多項式則可寫成拉格朗日基底函數的組合。

數學 II 釋疑

1. 如何用最少的數學背景知識講解最小平方法？

答：

(1) 首先兩組數據標準化，這樣才方便建立關係。比如要探討班上同學的英文和數學成績的相關性，先將這兩組成績都扣除其個別的平均分數，再除以其個別的標準差，使得標準化數據的平均為 0，標準差為 1，也就是

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \sum_{i=1}^{n} y_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = n,$$

(2) 我們要找一函數 $y = mx$ 使得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - mx_i\right)^2$ 為最小。由

$$0 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - mx_i\right)^2 = 1 - 2rm + m^2$$

其中 $r = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ 。由配方法

$$1 - 2rm + m^2 = (m-r)^2 + (1-r^2)$$

可得此二次式的最小值發生在 $m = r$,又由二次式 $1-2rm+m^2 \ge 0$ 得 $r^2 \le 1$，即相關係數 $|r| \le 1$ 。