插值多項式該怎麼教

在研習的活動中，有老師提出「為何要教插值多項式」,「插值多項式該怎麼教」的困惑。我想一個關鍵點是：如果老師們改由函數的角度切入多項式函數這一章，而不是傳統的代數的角度切入，將會發現許多內容會有自然的連結，而教學目標也會明確。

下面我就由函數的角度來談多項式函數的學習，我將談簡單多項式函數與插值多項式函數。

1.簡單多項式函數的學習要讓學生掌握到（1）函數的表現式（2）函數圖形特徵（3）應用。

1-1.一次函數有幾種表現式：$y=mx+b$，$y=m(x-x_b)$，$y=y_0+((y_1-y_0)/(x_1-x_0))(x-x_0)$，它們分別為已知斜率為 y 截距，已知斜率與 x 截距，以及已知通過兩點（x_0, y_0），（x_1,y_1）所對應到的一次函數。學生要學會各式間的轉換及各位數在圖形的意義與應用，學生也要學習透過標示重要點或可簡單求值的點，描繪函數的圖形。在一次函數時，給了兩點就可以 決定該函數，而可簡單求值的點是（X_0,0）與（0,b），其所對應到式子則是斜截式。

1-2.二次函數：2 次函數的表現式有 $y=ax^2+bx+c$，$y=a(x-h)^2+k$，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (如果有零根)。而另插值多項式的表示法，則留在除法之後再談。二次式中各式之間的轉換是透過配方法來完成。

函數圖形的特徵包括：零根頂點(如果有的話)、對稱性、凹凸性、正定性。透過函數特徵如零根位置（如果有），頂點位置（0,f(0)）的位置等關鍵訊息描繪函數的圖形。一次、二次函數有許多應用，過去的教學中均累積相當多的例子，此處不贅述。

1-3.單項函數 $y=cx^n$ 這裡主要是要讓學生體會單項函數在零點附近的函數，貼近 0 的行為。描圖的關鍵點為 x=1 的描點是要看 c 對圖形的影響，在 $x=\frac{1}{2}$的描點是要看 n 的影響，在 $x=-\frac{1}{2}$是透過奇偶性看函數的對稱與反對稱性。另外單項函數還要學習平穩。

2.插值多項式函數：

前面的學習是給了一次、二次函數的圖形，是經由標示其關鍵點或是可簡單求值的點來描其圖形。在應用上，我們則常運用到給了函數在數個點的值，要反推這個函數，這便是插值多項式函數。求此插值多項式雖可寫成一般式，再去求其倒數，但是除法的觀念，可將其表示成拉格朗日式或牛頓式，將更為簡便，

其求法我用下面的例題說明如下：

2-1.牛頓插值多項式：

例 1.求通過(x_0, y_0)，（x_1, y_1）的一次函數

解：由餘式定理得 $f(x)= y_0+$（$x- x_0$）由於 f 為一次式，所以 g（x）為常數 m，再代入 f（x_1）= y_1 可得 $m=(y_1-y_0) / (x_1-x_0)$。

例 2.求通過（1,3），(2,2），(3,5）的二次函數

解：由餘式定理得 f(x)=3+(x-1)g(x)，我們將 f(2)=2、f(3)=5 代入，分別得 g(2)=-1、g(3)=1，由於 f 為二次式，因此 g(x)為一次式。可再用一次餘式定理在 g(x)上得 g(x)=-1+(x-2)m，再將 g(3)=1 代入，得 m=2，上面這個做法的關鍵是透過除法降階，我們將這個做法改寫成下面未定的作法：令 $f(x)=C_0+C_1(X-1)+C_2(X-1)(X-2)$分別代入 f(1)=3，f(2)=2，f(3)=5 很快可求得 $C_0=3$，$C_2=-1$，$C_3=2$ 這就是牛頓的插值多項式。

2-2.拉格朗日插值多項式：

下面我們由因式定理來談拉格朗日多項式：

例 3.已知ℓ_1在 x=1，x=2，x=3 的值分別為(1,0,0)，求二次式ℓ_1

解：由於 x=2，3 為ℓ_1的零根，應用因式定理二次可得$\ell_1(x)=(x-2)(x-3)g(x)$，由於ℓ_1為二次式，因此 g(x)僅為常數 c，再將$\ell(1)=1$ 代入得$\ell_1(x)=(x-2)(x-3)/(1-2)(1-3)$，同理我們可求下面兩個 2 次函數$\ell_2$、$\ell_3$分別滿是$\ell_2(1)= \ell_2(3)=0$，$\ell_2(2)=1$，以及$\ell_3(1)= \ell_3(2)=0$，$\ell_3(3)=1$。其表現式為$\ell_2(x)=(x-1)(x-3)/(2-1)(2-3)$，$\ell_3(x)=(x-1)(x-2)/(3-1)(3-2)$，這三個函數可以組合起來，表現已知 x=1,2,3 值的任意二次函數。比如已知 f(1)=3，f(2)=-1，f(3)=5 的二次式為 f(x)=3，$\ell_1(x)+(-1)\ \ell_2(x)+f5\ell3(x)$這是代入直接可驗證。

2-3.插值多項式的唯一性：

上面的牛頓插值多項式與拉格朗日插值多項式，要驗證這一點，我們沒令牛頓式為 f_1，拉格朗日多項式為 f_2，$g(x)=f_1(x)-f_2(x)$，則 g(x)為二次式，且 g(1)=g(2)=g(3)=0，由因式定理得 g(x)=c(x-1)(x-2)，再代入 g(3)=0 得 c=0，因此 g(x)=0。

結語：

現在我可以直接回答上面兩個問題

Q：為什麼要教插值多項式？

A：由學習函數的角度切入，我們給一函數的表現式要能透過描點得其圖形。反之我們給了一些函數值，也要能反求其插值多項式。這是數學表現式與圖形

連結的關鍵。插值多項式的一個重要應用是用來求一般函數近似值，這在指對數函數、三角函數中會用到。

Q：如何教插值多項式？

A：簡單的說，其中插值多項式的學習要與除法連結。牛頓插值多項式是透過連續套用餘式定理所得，而拉格朗日插值多項式則是連續套用因式表現定理而得。