多項式函數教學

陳宜良

2008.12

為什麼要學多項式函數

- 多項式方程式是透過變數引進與解方程式來解決應用問題，這是具普遍性的方法
- 函數是表徵兩量關係的基本語言，多項式函數是在四則運算下最基本的函數，可以直接求值，也是用來逼近一般函數的基本函數

函數、圖形與應用的結合

二、多項式函數	1. 簡單多項式函數及其圖形	1.1 一次函數與二次函數 1.2 單項函數：奇偶性、單調性、圖形平移	
	2. 多項式的運算與應用	2.1 乘法、除法(含一次綜合除法)、除法原理(含餘式定理、因式定理)及其應用 2.2 插值多項式函數及其應用	2.1 不含最高公因式與最低公倍式 2.2 插值多項式不超過三次
	3. 多項方程式	3.1二次方程式的根(含複數 與複數的四則運算) 的意義 3.2有理根判定法、勘根 二分逼近法、n次方根的 3.3 實係數多項式的代數 定理、虛根成對定理	3.1 複數的幾何意涵
	4. 多項式函數的圖形與多項不等式	4.1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題	4.1 不含分式不等式

函數、圖形與應用的結合

插值多項式為通過n相異點的最簡多項式

函數、圖形與應用結合的說明

- 函數圖形的繪製是培養學生「函數感」的重要歷程；而「函數感」是由函數的定義方式指對於下列三者的綜合認識：
- （1）函數的圖形特徵
- （2）這些特徵所對應的現實意涵
- （3）以其作為數學模型的典型問題
- 這三者的綜合認識。首先要經過描點，其次可學習操作或輔之以電腦繪圖，再來是要由圖形的特徵讀出函數在現實世界中之特別意涵，以及應用它們的典型問題。

- 例如：
  - A. 一次函數圖形的特徵有斜率和截距，典型應用是作為等速運動的模型，斜率的正負值在數學內部對應漸增或漸減性質，在典型問題上則代表運動的方向。
  - B. 二次函數的特徵包括頂點坐標、開口方向和開口寬度，其典型應用是等加速度運動，又特別如自由落體和拋射；在數學內部，頂點和開口方向對應極值和值域，開口寬度對應曲率彎曲程度，在典型問題上，則對應等加速度與運動的最高點。
  - C. 高三選修數學Ⅱ的三次函數首度展現反曲點，引出加速度的變化對應曲率的變化，亦即圖形的凹凸性對應速度越來越快或越來越慢的運動。其特徵在數學內部為重根的次數，表現在圖形上就是在零點附近「扁」的程度。
  - D. 上述低次多項式函數或冪函數的具體經驗，在數學Ⅰ初步接觸，以圖片形做直觀介紹，並不提及曲率與加速度等名詞；最後在高三選修數學Ⅱ（甲或乙）透過微積分的學習而統整起來。

前置經驗

7-a-09 能認識函數。

7-a-10 能認識常數函數及一次函數。

7-a-11 能理解平面直角坐標系。

7-a-12 能在直角坐標平面上描繪常數函數及一次函數的圖形。

8-a-03能認識多項式及相關名詞。

8-a-04能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。

9-a-02 能描繪二次函數的圖形。

數學I 第一章 數與式

國中	高中
7-a-09 能認識函數。 7-a-10 能認識常數函數及一次函數。 7-a-11 能理解平面直角坐標系。 7-a-12 能在直角坐標平面上描繪常數函數及一次函數的圖形。 9-a-02 能描繪二次函數的圖形。	1.1一次函數：變化率（應用意涵，如速度）、斜率（幾何意涵） • 介紹函數 $y=f(x)$ 的符號及函數圖形。 • $y=mx+b=m(x-x_0)$ 中 m,x_0,b 的幾何意涵，其中m在幾何上的意涵為斜率，在應用上的意涵表示y對x的變化率。 1.2二次函數：配方法、圖形、極值、判別式、正定性（恆正性）、應用實例 • 極值問題的應用，例如： $f(x)=x^2+2x+3,-2\le x\le 2$ 的極值。 • 正定性：所謂二次式的正定性是指其函數值的恆正性，譬如判斷 x^2-x+4恆為正。 • 能繪出各種不同型式的二次函數的圖形如 $y=c(x-a)(x-b)$、$y=ax^2+bx+c$、$y=a(x-h)^2+k$，並能進行二次函數不同型式的轉換。

1.1一次函數：變化率（應用意涵，如速度）、斜率（幾何意涵）

- 介紹函數$y=f(x)$的符號及函數圖形。
- $y=mx+b=m(x-x_0)$ 中 m,x_0,b 的幾何意涵，其中m 在幾何上的意涵為斜率，在應用上的意涵表示y 對x 的變化率。

函數、圖形與應用的結合(一次函數)

- 一次函數的型式
  - 點斜式
  - 兩點式
- 圖形
  - 斜率、截距
- 應用
  - 變化率、速度

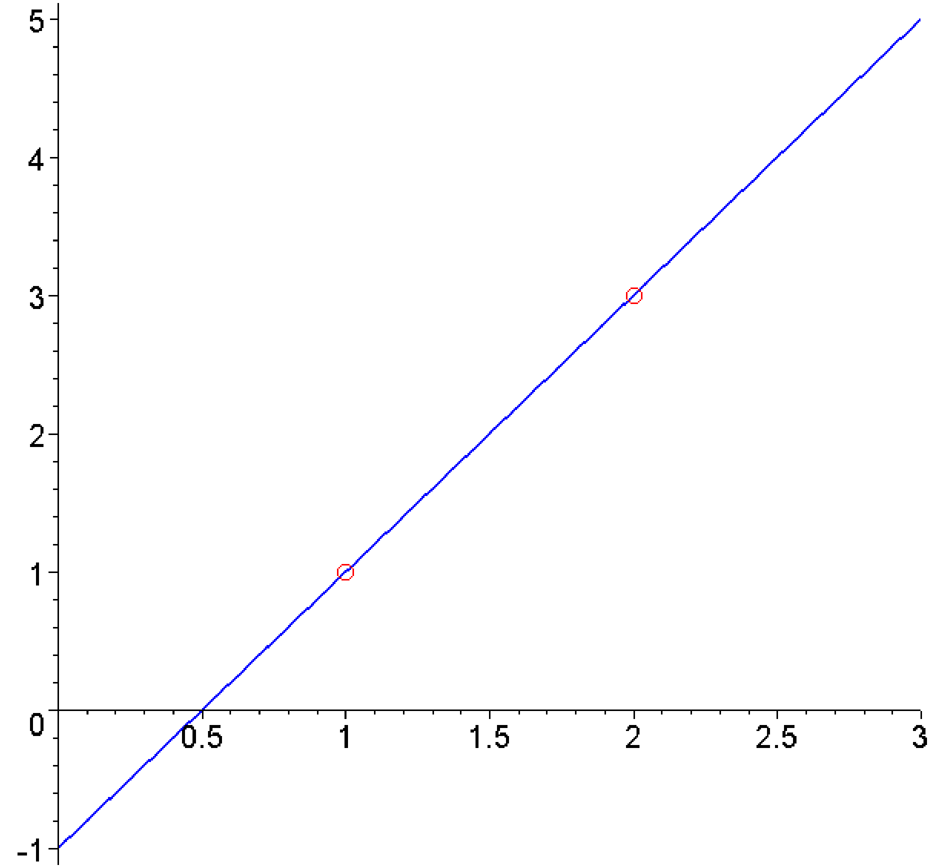
函數、圖形與應用的結合(一次函數)

- 插值多項式：通過 $(1,1),(2,3)$之一次函數

設 $y=a+b(x-1)$

代入 $x=1, y=1$得 $a=1$

代入 $x=2, y=3$得 $b=2$



二次函數：配方法、圖形、極值、判別式、正定性（恆正性）、應用實例

- 極值問題的應用，例如：$f(x)=x^2+2x+3, -2\le x\le 2$ 的極值。
- 正定性：所謂二次式的正定性是指其函數值的恆正性，譬如判斷x^2-x+4恆為正。
- 能繪出各種不同型式的二次函數的圖形，如 $y=c(x-a)(x-b)$、$y=ax^2+bx+c$、$y=a(x-h)^2+k$，並能進行二次函數不同型式的轉換。

函數、圖形與應用的結合(二次函數)

- 函數型式

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x - h\right)^2 + k$$

$$y = c\left(x - a\right)\left(x - b\right)$$

$$y = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2)$$

- 圖形特徵
  - 頂點、對稱軸、凹凸性、相異根、重根、正定性
- 應用
  - 極值問題

函數、圖形與應用的結合(二次函數)

- 插值多項式：通過 $(1,1),(2,0),(3,3)$之二次函數

設 $y=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

代入 $x=1, y=1$ 得 $a=1$

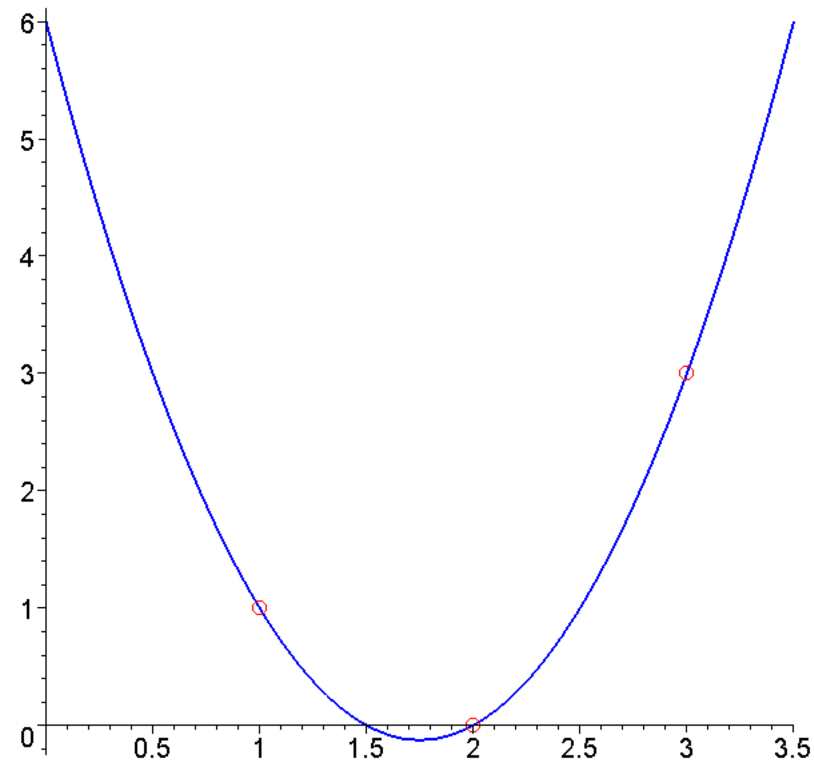
代入 $x=2, y=0$ 得 $b=-1$

代入 $x=3, y=3$ 得 $c=2$

- 求 $f(n)=1+2+\cdots+n$

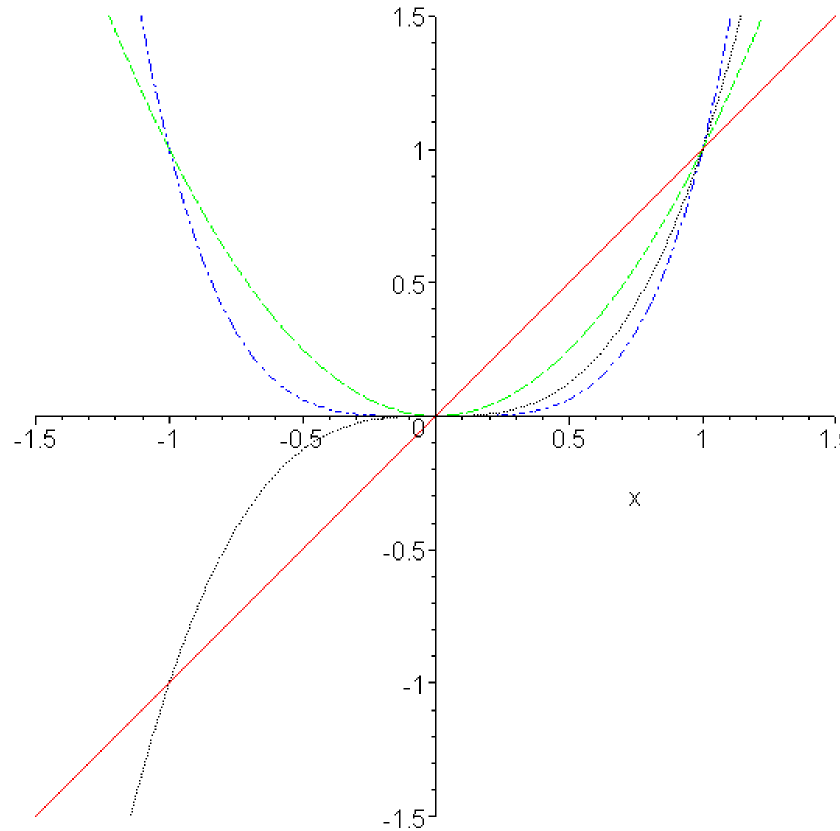
代入 $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=3$

得 $f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$



單項函數的奇偶性、單調性和圖形的平移

- 瞭解函數 $y=x^n$，$n=1,2,3,4$ 在 $[-1.5,1.5]$ 的圖形，初步認識相切的意涵
- 當為正整數時，型如 $y=cx^n$ 函數的奇偶性與單調性。
- 瞭解c的正負、大小與函數 $y=cx^n$ 圖形的關係。
- 利用平移畫出型如 $y=c(x-h)^n+k$ 的圖形。



2. 多項式的運算與應用

- 2.1乘法、除法（含除式為一次式的綜合除法）、除法原理（含餘式定理、因式定理）及其應用（含多項式函數的求值）
- $\left(x-a\right)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}\right)=x^{n}-a^{n},n=2,3,4$ 。
- $(x+a)(x^{2}-ax+a^{2})=x^{3}+a^{3}$ 。
- 除法中的除式不宜太高次，以一次式和二次式為主。

綜合除法的應用

- f除以 $(x-a)$所得餘式為 f在 a點的值，可用來求值
- f連除 $(x-a)$兩次，得餘式為 $f(a)+m(x-a)$，

為f 在a 點的切線，可用來求f 在a 點附近似值

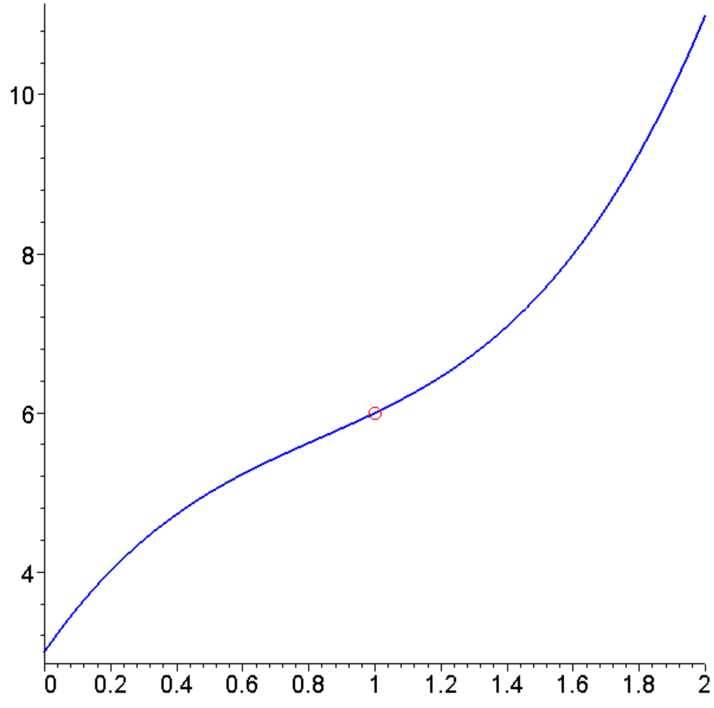
- f 除以$(x-a)$後再除以 $(x-b)$，可得餘式

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

為f 在通過$(a,f(a)),(b,f(b))$ 的割線，可用來求f 在a,b 間之近似值

綜合除法的應用

- 透過連續的多項式綜合除法，求
$$f(x)=2x^3-5x^2+6x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$$
中的 a,b,c,d 與求 $f(1.01)$ 的二位小數近似值。

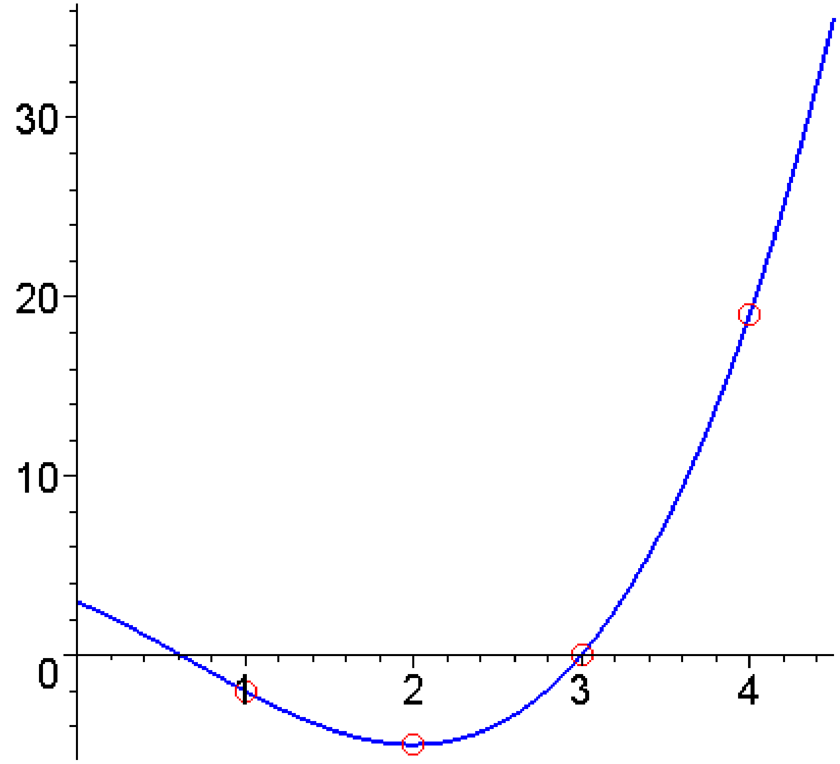


插值多項式

- 透過連續的多項式綜合除法，求

$$f(x)=x^3-2x^2-4x+3=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$$

中的 a,b,c,d 。



插值多項式

- 導 $f(n)=0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2$公式
- 設 $f(n)=a+bn+cn(n-1)+dn(n-1)(n-2)$

  由$f(0)=0, f(1)=1, f(2)=5, f(3)=14$ 推得插值

  多項式 $f(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. 多項式方程式

- 3.1二次方程式的根與複數系（含複數根與複數的四則運算）
  - 二次方程式的根包括判別式、公式解、根與係數關係及簡易分式方程式；複數系包括複數的引進（不引進複數平面與複數的幾何意涵，如：絕對值）、複數的四則運算，以及共軛複數。
  - 複數乘法的定義是在數系擴張時仍維持乘法對加法的分配律。

- 複習 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解，含複數根。
- 根與係數關係：
- 設 $x^2+5x+3=0$ 的二根為 α 與 β ，求 $\alpha^2+\beta^2$ 、 $\alpha^3+\beta^3$ 。
- 簡易分式方程式（通分展開後為二次方程式），如： $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3}{2}$ 。

3.2有理根判定法、勘根定理、$\sqrt[n]{a}$的意義

- 有理根判定法：首尾項係數不宜有太多因數，以免過於繁複的運算。
- 勘根定理：求 $x^n = a$的實數解，其中 $a > 0$ 。
- 正n次方根的存在唯一性證明。

3.3實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理

- f有 $\alpha+i\beta, \beta\neq 0$ 的根

  $\Leftrightarrow f$ 有$(x-\alpha)^2+\beta^2$ 之因式(證明虛根成對定理)

- 讓學生知道實係數多項式可分解為一次式與二次式的乘積的事實：

  $$f(x)=k(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{s_1}\cdots\left(x^2+b_mx+c_m\right)^{s_m}$$

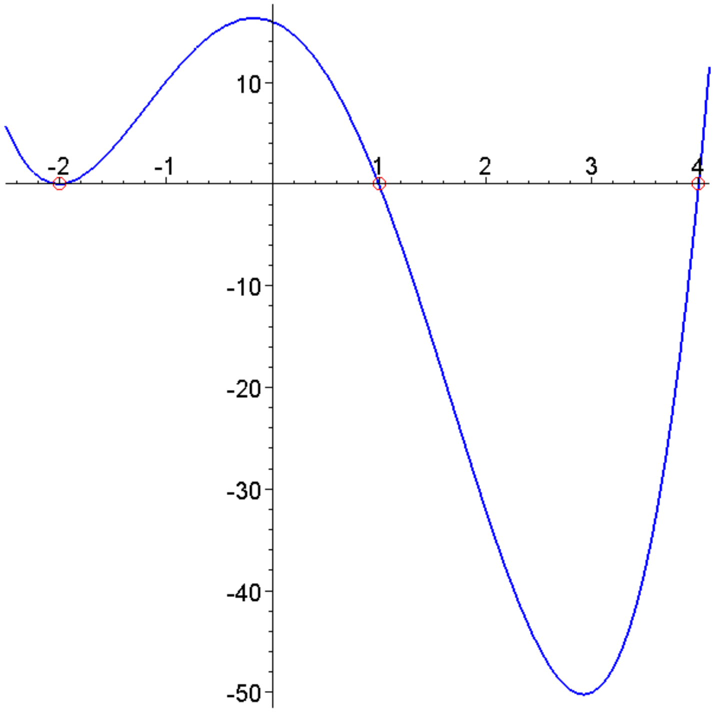
  其中二次式不可分解。

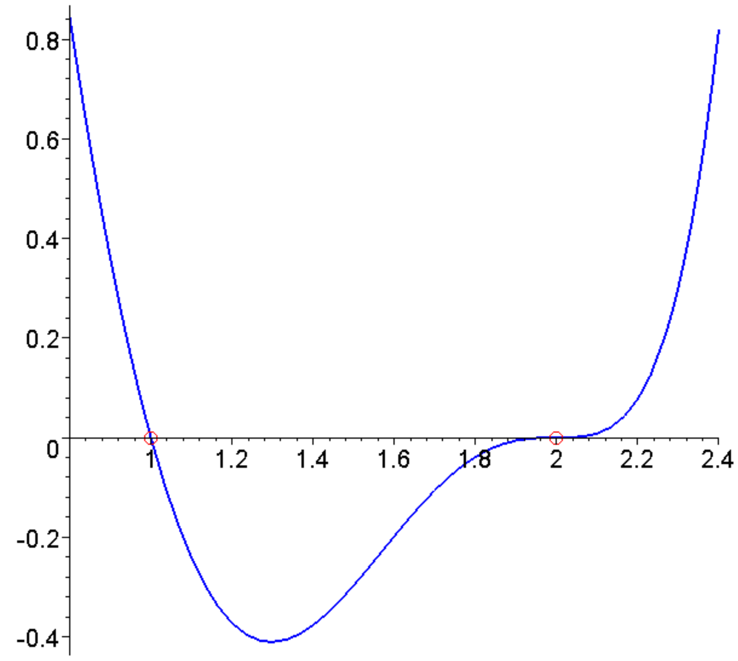
- 利用除法求 $f(x)=5x^4-21x^3+30x^2-9x+7$

  在 $x=2+i$ 的值。

4. 多項式函數的圖形與多項式不等式

- 只談低次或已分解的多項式不等式問題，並能辨識函數圖形特徵（根的位置、重根、函數值正負的區間）
- $(x-1)(x+2)^2(x-4)>0$、$(x-1)(x-2)^3(x^2+x+1)>0$





函數、圖形與應用結合的結語

- 函數圖形的繪製是培養學生「函數感」的重要歷程；而「函數感」是由函數的定義方式指對於下列三者的綜合認識：
- （1）函數的圖形特徵
- （2）這些特徵所對應的現實意涵
- （3）以其作為數學模型的典型問題
- 這三者的綜合認識。首先要經過描點，其次可學習操作或輔之以電腦繪圖，再來是要由圖形的特徵讀出函數在現實世界中之特別意涵，以及應用它們的典型問題。

謝謝大家