

# 中小學數學科 課程綱要評估與發展研究

研究主持人：陳宜良

研究員：單維彰、洪萬生、袁媛

研究助理：魏士傑、舒宇宸、姜志遠  
翁婉珣、黃子倩、洪雅齡

中華民國九十四年8月4日

## 摘 要

本研究依據 92 年頒布之國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要，以及預定 95 學年實施的高中與高職數學課程暫行綱要，為教育部之「建置中小學一貫體系計畫」探討檢視 12 年數學課程設計之一貫性、銜接性、適切性與政策呼應性，並將彙整之資料、結論與建議寫成此報告書。

為撰寫此報告所執行之研究方法為文獻分析、跨國比較與專家晤談。據以分析之文本，取美國加州、新加坡、中國、南韓、日本與英國等六個國家或地區之相對數學課程綱要或標準，分別與上述兩套本國數學課程綱要做兩兩比對而列出異同，再由研究團隊探究分析。過程當中亦需查明各國之教育體制與課程結構，以為整體判斷之依據。而針對各階段綱要制訂者、教師代表、教科書編者分別舉辦之座談，也事先由研究團隊根據文獻分析的初步發現而擬定題綱，徵詢多方意見以匯聚共識。

本報告以前兩章概述此研究之背景與研究方法；第參章比較本國與上述六個國家或地區之數學課程設計與相關實施方法；第肆、伍章依施政呼應性、綱要設計之一貫與銜接性與課程內容之合宜性，詳述研究結果，並論及資訊與通訊科技工具的角色，與時數分配和選修制度等實施方面的議題。在第肆、伍、陸章的論述當中，已經分別就特定的課題提出建議。第柒章彙整了主要的結論與建議。附錄則詳列我國與各國之數學課綱並列比較表格。

在課程的實施策略與設計理念上，本研究之結論呼籲重視語文和數學在基礎教育中的核心地位，並如實反應於授課時數的分配；期望 12 年整體觀點的數學課程規劃，能夠更有效率地發展主軸知識與技能，並正視科技工具對於學習本質造成的影響；還建議以更寬宏的眼光和胸懷，來落實適性的教學與後期中等教育的選修制度。對於目前數學綱要之安排與內容，本研究也做出明確的調適建議。我們冀望這些結論與建議，能對未來的政策擬定，以及數學綱要之修訂，做出實質貢獻。

## 目 錄

壹、緒論.....	3
貳、研究方法 .....	5
一、文獻分析 .....	5
二、跨國比較 .....	6
三、座談會 .....	7
參、跨國比較 .....	10
一、我國課程綱要架構說明與分析 .....	11
二、美國加州 .....	15
二、新加坡 .....	19
三、英國.....	40
四、中國大陸 .....	50
五、韓國.....	60
六、日本.....	68
肆、課程綱要與施政主軸關聯性 .....	81
伍、綱要內容與實施方法之評估 .....	84
一、課程綱要之一貫性與銜接性 .....	84
二、課程綱要內容之適切性 .....	87
三、科技工具的使用 .....	90
四、時數分配的恰當性 .....	92
五、課程架構與學制彈性 .....	93
六、實施方法的問題 .....	95
陸、其他科/領域之統整性 .....	96
柒、結論與建議 .....	100
一、整體建議 .....	100
二、對十二年一貫課程架構的一些看法 .....	101
捌、參考文件 .....	118
玖、附錄.....	121
附錄一、台灣與加州數學綱要比較表 .....	121
附錄二、台灣與新加坡數學綱要比較表 .....	147
附錄三、英國數學課程標準的能力等級描述 .....	189
附錄四、台灣與中國大陸之數學課程比較表 .....	197
附錄五、台灣與韓國數學課程綱要比較對照表 .....	241
附錄六、台灣與日本之數學課程比較表 .....	262
附錄七、跨國課時對照表 .....	285

# 中小學課程體系原則發展計畫

## 數學科課程綱要評估

### 壹、緒論

為因應社會變遷的需求，課程改革成為近年來教育改革的重點之一，而我國的中小學數學課程在近十年來產生了很大的變化。過去，有關數學課程的修訂都是各個年段各自修定，即國小、國中及高中各由不同的委員會負責修訂的任務。九年一貫課程的提出即在統整各學科的課程內容，使得學科間的學習可以統整，同時國小與國中的課程能銜接起來。現行的高中課程標準係於民國 84 年公佈實施，教育部考量要銜接九年一貫數學課程，因而著手修訂高中課程綱要。但因為某些原因使得新修訂的高中課程暫行綱要將延至九十五學年度實施，似無法達到原先預定銜接九年一貫課程的目的。各階段數學課程從「課程標準」演化成「數學綱要」，主要是教育制度上想要鬆綁的一股浪潮，希望經由一個學習的最低標準，給教師一個展現專業的空間。但課程綱要是規範學習內容及教學實施的指導原則，其對學生學習的影響甚巨，其實施結果甚至將影響國家整體的競爭力，因此對課程綱要的評估與修正是國家刻不容緩的持續工作。

近二十年來，國小數學課程的發展經歷了四次的修訂，分別是民國 64 年公布修訂於 67 學年度實施的國小數學課程標準、民國 82 年公布修訂於 85 學年度實施的國小數學新課程、民國 87 年公布於 90 學年度實施的九年一貫數學課程暫行綱要(暫綱)及民國 92 年公布並即將於 94 學年度正式實施的九年一貫數學課程綱要(正綱)。國中數學課程的發展也經歷了四次的修訂，分別是民國 74 年、民國 83 年、民國 87 年的九年一貫數學課程暫行綱要及民國 92 年公布並即將於 94 學年度正式實施的九年一貫數學課程綱要。高中數學課程也歷經民國 73 年、民國 84 年及最近一次民國 94 年修定即將於 95 年度正式實施的高中數學課程暫行綱要。

依據「建置中小學一貫體系計畫」，教育部擬於 94 年底提出一個十二年課程一貫的構想，因此想針對即將於 94 學年度實施的九年一貫數學課程綱要及 95 學年度實施的高中數學暫行綱要進行一貫性與妥適性評估，以作為 98 學年度課程綱要修訂之參考及學理依據。

本研究依據各學科召集人及課程專家所研擬的課程綱要評估項目而執行，各項目如下：

1. 評估課程綱要之施政主軸回應性
  - (1)現代國民
    - a. 教材內容與學生潛能開發需求之符合性
    - b. 教材內容符合社會及國家需求之合宜性
  - (2)台灣主體 (檢視各科課程綱要中台灣主體所佔的比例性)
  - (3)全球視野
  - (4)社會關懷
2. 評估課程綱要內容與實施方法
  - (1)課程綱要之一貫性與銜接性
  - (2)課程綱要內容之適切性

- (3)科技工具的使用
  - (4)課程架構與學制彈性
  - (5)實施方法的妥適性
3. 其他科/領域之統整性
- (1)各學科培育能力之相互配合性
  - (2)各領域相關科目間之統整及區別的合理性

## 貳、研究方法

本計畫的主要目的在評估數學領域由國小至高中的課程綱要的一貫性與妥適性，包括九年一貫數學領域課程綱要(教育部，2003)、95學年度高中數學暫行綱要(教育部，2003)，以作為九十八學年度課程綱要修訂之參考及學理依據。為達成此研究目的，本研究計畫在研究方法上採用「文獻探討法」以了解各國的數學課程並進行跨國比較研究及舉辦「專家諮詢座談會」蒐集其對課程綱要內容的評估意見。本計畫的研究方法詳細說明如下：

### 一、文獻分析

本報告書中，各國數學課程綱要或標準之文獻，主要來自於各國教育部或教育單位的官方網站。其中，中國大陸一到十二年級的數學課程標準，來自於中國大陸的教育部，但其一到九年級和十到十二年級的課程標準，分別由兩個不同文件獲得。日本一到十二年級的數學課程標準，同樣取得於其教育部，且一到九年級和十到十二年級的課程標準，亦是來自於不同的文件。南韓一到十二年級的數學課程標準，依據其教育部公告的數學課程標準，寫成一冊，從韓國 Konkuk 大學教育學院的 Kyung Yoon Chang 院長那裡獲得。新加坡較為特別，其課程綱要只編製到八年級（即是中二），有其教育部公告的課程標準；九到十二年級沒有官方的課程標準，而是依照國家證照考試標準來安排課程。其考試標準分成三個等級，其中最高標準設定為精英標準，因此我們在這份報告的比較中，沒有涵蓋此最高等級的數學標準。附帶一提，此精英標準的程度相當於我國大一微積分課程以及一部份普通物理課程的程度。英國一到十年級，也就是英國所謂的第一到第四「關鍵階段」(Key Stages)，有一個全國的課程標準；而十一、十二年級亦沒有國家課程標準，而是按照國家證照考試標準來安排課程。美國加州依據一套州政府教育部門之公告，制定幼稚園到十二年級(K-12)的課程標準。總而言之，上述六個國家或地區的課程綱要或標準中，只有美國加州和韓國，有一貫的一到十二年級數學課程標準；而相較之下，新加坡和英國的課程標準較無一貫性。

美國加州、新加坡及英國的數學課程標準皆是以英文寫的，我們直接閱讀英文文本來做比較。中國大陸的數學課程標準是用簡體字編寫的，我們利用網路上的標準軟體，翻譯成正體字版本後稍加修訂別字，當作比較的標準文本。日本的數學課程綱要是用日文寫的，其一到九年級的課程是依照李園會教授翻譯成中文的《日本中小學學習指導要領》來比較(92年水牛出版社)。日本的高中數學課程綱要，是依照文部科學省網站 [http://www.mext.go.jp/b\\_menu/houdou/11/03/990302.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/11/03/990302.htm) 的公告文件。日本高中和高職的課程分成許多專業，且高職的課程，分成許多不同層次的數學科目，因此我們不探討高職數學的課程標準，主要依照高中的數學課程標準做文獻分析。我們請兩位留學日本的碩士蔡知穎小姐與林謹君小姐，代為翻譯日本高中數學綱要。韓國的數學課程綱要也是以他們的本國語言撰寫的，我們據以比較的文本，是由當時就讀政治大學教育系的韓籍留學生李海娟小姐翻譯。

## 二、跨國比較

我們將台灣的數學課程，與外國地區的數學課程兩兩比較。外國地區包括美國加州、大陸、新加坡、韓國、英國和日本。報告書的附錄中，提供一張表格，以學齡區分一到十二年級的數學課程標準。由於各個國家中，十一年級以上皆有選修課程，因此我們會與各個國家的選修課程做比較。除了以下的三個例外：第一，我們捨略新加坡的最高級標準。第二，由於中國大陸在高中開設太多的選修課程，因此我們挑選近似台灣課程的 22 個學分，捨棄一些與台灣課程內容過於不同的課題，據以比較。最後，我們亦省略美國加州最高級的課程。

以數學課程標準的內容而言，我們依據 92 綱要及 95 暫行綱要當時之分類精神，統一將數學內容分成以下五大數學課題做比較：數與量、代數（含關係、樣式、函數）、幾何（平面幾何、坐標系統、平面和空間的向量）、機率統計及數學分析。此外，我們會對各個國家作精要的評析，此評析提示每一國家，在數學課程綱要中的特色，指出值得我國觀摩及注意的地方。據每個國家的文獻分析結果顯示，其實施課程綱要的授課時數的統計，也會放在跨國比較的項目中。大部分國家的學制，至十年級（即高一）皆是統一課程標準，而十一、十二年級實施課程分流，且大部分國家都將數學課程列為選修課程。據文獻顯示，每個國家的分流時間、選修規定、升學制度都稍有不同。雖然這些制度層面與數學課程並不直接相關，但我們都將之放在跨國比較的項目內探討。最後，我們在各個國家的課程綱要內，也觀注各國如何定位計算器和計算機，我國將計算器分成兩個層次，一是只能做加減乘除開根號等功能的計算器，二是指具有計算基本函數功能的科學計算器。計算機則是我們所謂的電腦工具，包括軟體和投影機的整套電腦設備。我們將討論它們在數學課程中的定位。

### 三、座談會

欲在短時間內進行數學課程的評估，只是經由一群研究者進行跨國數學課程內容的比較與評估似有不足，因此本研究計畫採專家諮詢座談的方式蒐集相關數學課程的評估意見。研究團隊在與專家諮詢座談前，先就跨國課程比較結果作初步分析，並從目前各階段數學課程綱要內容草擬討論題綱。

#### (一)九年一貫數學課程部分

主題	內容
1. 分數與小數概念的呈現是否合宜與完備(譬如是否兼顧知識結講與認知發展平衡)	能力指標 N-2-13 及三個分年指標 4-n-8, 4-n-10, 5-n-11 之安排是否適當
2. 估算是否重要	(1) 是否在分年細目中落實 (2) 是否從小學到高中具一貫性與銜接性 (3) 是否和其他學科的估算建立連結(國二理化科的估計值)
3. 小數位值觀念的鋪陳及其與科學命數、度量、有效數字及小數直式計算規則的連結是否合宜	(1) 小數位值觀念的介紹是否足夠 7-n-15, 4-n-09 (2) 小數的直式運算 (3-n-10, 4-n-11, 5-n-08, 6-n-04)
4. 函數觀念的鋪陳是否合宜	(1) 變數函數觀念引進是否太快? (2) 函數概念的前置經驗是否可以在正方形及圓的面積以及正方體體積公式的學習加以延伸? (3) 函數觀念是否由小學至高中具一貫性與銜接性?
5. 從算術到代數的過渡是否合宜能否呈現方法演化之精進	(1) 等號的意涵由表示運算的結果過渡至等價的意義是否平順 (2) 當量除問題對小六的學生使用算術思考是困難的(6-n-03)，是否可以放在七年級與代數問題一起解決(譬如新加坡在小學沒有把分數及小數放進去)
6. 數學的推理與證明之銜接	(1) 國中階段數學推理的鋪陳與高中數學形式的證明 (2) 高中形式證明的訓練是否足夠



## (二)高中數學課程部分

討論主題	內容
三角函數	(1)三角比與三角函數同在高一下學期學習是否太快? (2)三角函數的內插查表是否必要 (3)三角函數與其他學科之連結並無著墨，是否可以考慮納入聲波、光波等疊合的現象作為外部連結
函數	(1)函數放在附錄裡頭是否適當 (2)未談合成函數及反函數是否恰當 (3)函數圖形的理解可否引進電算器 (4)指數對數函數與三角函數可否放在高二課程? (5)對數學習是否需要查表
數學選修(一)(二)的定位	(1)是否可以增加數學選修科目與時數，並以主題科目方式編寫，如線性代數、機率與統計 II 與微積分等 (2)由於數學授課時數減少造成數學教師員額的裁減，實施過程是否應採漸近方式
機率與統計	(1)隨機變數沒有引進，機率內容似乎不足 (2)迴歸直線的教學放在高中是否合宜 (3)機率與統計 II 的教學對現階段老師會有困難
邏輯推論與證明是否有弱化	(1)學生如何理解反向證明法(歸謬法)，如何理解反例的功能 (2)學生如何學習嚴謹的數學證明

因為數學課程綱要制定者(含 92 九年一貫數學課程及 95 高中數學綱要)對綱要的制定有其基本的理念與想法，本研究希望經由與數學課程綱要制定者的討論，了解制定綱要內容的基本理念與想法，並針對題綱內容與其討論，以便達成評估共識。而教科書的編寫者，在教科書編寫權開放之後，即需依據綱要內容編寫教材，所以他們對於數學課程綱要的詮釋與了解可為此次課程評估提供寶貴的意見。除了數學課程綱要制定者及教科書的編寫者之外，本研究也與部分縣市的數學科輔導員交換意見，主要是因為數學科輔導團員多半負責參與課程推廣及實驗工作，其豐富的實務經驗及與第一線教師的互動，可以提供課程評估的相關意見。因此，本研究的專家諮詢的對象包括各階段數學課程綱要制定者、教科書的編寫者及數學科輔導團員。與諮詢專家的討論內容主要以研究小組研擬的討論題綱為主，對諮詢專家提出不在討論題綱的內容也會列入記錄作為研究的內容。本研究與專家諮詢的時程安排如下：

會議類別	會議日期	與會人員	會議內容
課綱評估	94/02/21	課綱研究小組	(1)確定跨國比較之國家 (2)確定評估報告之大綱
課綱評估	94/02/28	課綱研究小組	(1)確定計畫書格式及工作進度 (2)確定座談會時間及對象
課綱評估	94/03/06	課綱研究小組	(1)決定三次座談會之提綱草案 (2)檢視跨國比較之格式
諮詢會議	94/03/13	課綱研究小組、傅聖	(1)確定三次座談會之提綱

		國、蘇惠玉、蘇進發、謝秀宏、楊美伶、羅春暈及廖芳儀	
課綱評估	94/03/20	課綱研究小組、曾政清及林永發	(1)決定高中課程評估主題 (2)確定第一、二次座談會對象
課綱評估	94/03/27	課綱研究小組	※ 課綱結構分析
課綱評估	94/04/03	課綱研究小組	※ 高中數學課程綱要評估
諮詢會議	94/04/10	課綱研究小組、張鎮華、陳昭地及陳宏	※ 高中數學課程綱要評估
諮詢會議	94/04/10	課綱研究小組、朱建正、楊瑞智及陳冒海	※ 九年一貫數學課程綱要評估
課綱評估	94/04/17	課綱研究小組、詹勳國	※ 跨國比較
諮詢會議	94/04/24	課綱研究小組、詹勳國	(1)各國高中課程綱要比較 (2)下周座談會相關事宜
諮詢會議	94/04/26	陳宜良、張海潮	※ 高中數學課程綱要評估
諮詢會議	94/04/30	課綱研究小組、翁秉仁、孫德蘭及呂玉英	※ 九年一貫數學課程綱要評估
諮詢會議	94/04/30	課綱研究小組、張海潮、于靖及張鑫	※ 高中數學課程綱要評估
課綱評估	94/05/02	課綱研究小組	※ 數學科課程綱要評估報告書規格擬訂
諮詢會議	94/05/06	陳宜良、王慶安	※ 九年一貫數學課程綱要評估
課綱評估	94/05/09	課綱研究小組	※ 評估計畫書各章節修訂
課綱評估	94/05/16	課綱研究小組	※ 評估計畫書各章節修訂
課綱評估	94/05/23	課綱研究小組	※ 評估計畫書各章節修訂
課綱評估	94/05/30	課綱研究小組	(1)評估計畫書格式修改 (2)高中課程綱要修訂建議
諮詢會議	94/06/07	課綱研究小組、張海潮、林長壽、陳宏、李瑩英、翁秉仁	※ 高中課程綱要修訂建議

## 參、跨國比較

世界各國不約而同在二十世紀末展開教育改革的計畫，而大致上都把實施的時間訂在二十一世紀開端的前後幾年。英國看來比較早開始醞釀，在 1980 年代後期，就開始了教改的討論，包括 BBC 電台製作檢討教育的特別節目。各國均因其特殊的歷史與社會背景而由不同的動機觸發了教改議題，例如美國加州在數學教育方面的改革源自於所謂的 Math War，亦即對於基礎數學教材教法與內容選擇的辯論；而英國的國家型教改則源自於傳統上教育屬於私部門機構，太過於獨立分散而沒有一致標準、同時又不夠澤被全民而造成社會不公的反省。至於東亞的日本、韓國與台灣之教改著眼點則幾乎與英國相反，源自於教育過於中央集權、內容標準過於嚴苛而造成太大競爭壓力的反省。

不論動機如何，教育改革的目的是無非就是要培育具有國際競爭力的國民，使得本國或地區的經濟地位與生活品質，不至於在無可避免的全球化趨勢中，逐漸落於後塵。而在此大前提之下的二十一世紀教育又會有何特色？聯合國教科文組織出版的報告書《Learning: The Treasure Within》提供了視野寬廣而簡明扼要的預測藍圖。簡單地說未來的學習型態就是『終身學習』。學校的教育應該提供結實的核心知識與技能，使得能夠成為支持終身學習的共同基礎。而在中小學階段，此所謂共同基礎的核心知識與能力，咸認為是語文（包括本國語言和現代外語），數學和資訊工具。特別是資訊工具，它在計算與通訊上的急速發展，將徹底改變我們的學習型態、乃至於學習內容。在基礎教育之後的後期中等教育，則將變得更能支持年輕國民的生涯規劃，能提供更寬廣而且公平的選擇與嘗試機會，並且讓已經選定目標的人能夠深入發展其專業中的核心知能。

以下，我們分別簡介我國課程綱要架構，以及美國加州、新加坡、英國、中國大陸、韓國和日本等國家或地區的數學教育現況，並擇要比較這些地區之數學學習目標、內容綱要。詳細的內容比較表，列在這份報告的附錄中。

## 一、我國課程綱要架構說明與分析

### (一)國中小 92 綱要說明

- 1. 基本理念：**92 綱要認為，數學之所以被納入國民教育的基礎課程，有三個重要的原因：(1) 數學是人類最重要的資產之一，(2) 數學是一種語言，(3) 數學是人類天賦本能的延伸。基於以上的認知，國民與中等教育數學課程的目標，要能反映出下列理念：(1) 數學能力是國民素質的一個重要指標；(2) 培養學生正向的數學態度，了解數學是推進人類文明的要素；(3) 數學教學（含教材、課本及教學法）應配合學童不同階段的需求，協助學童數學智能的發展；(4) 數學作為基礎科學的工具性特質。
- 2. 內容主題：**數學領域將九年國民教育區分為四個階段：階段一為一至三年級，階段二為四、五年級，階段三為六、七年級，階段四為八、九年級。另將數學內容分為 (1) 數與量 (2) 幾何 (3) 代數 (4) 統計與機率 (5) 連結等五大主題。
- 3. 能力主軸：**在能力方面，除了數學知識外，92 綱要認為演算能力、抽象能力及推論能力的培養是整個數學教育的主軸；另外學生也要具備數學溝通的能力，這包括理解與表達。
- 4. 目標：**具體而言，九年一貫數學學習領域的教學總體目標為：(1) 培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力，(2) 學習應用問題的解題方法，(3) 奠定下一階段的數學基礎，(4) 培養欣賞數學的態度及能力。其中，國民小學階段目標為：(1) 在第一階段（一至三年級）能掌握數、量、形的概念，(2) 在第二階段（四至五年級）能熟練非負整數的四則與混合計算，培養流暢的數字感，(3) 在小學畢業前，能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單幾何形體的幾何性質、並理解其面積與體積公式；能報讀簡單統計圖形並理解其概念。國民中學階段目標則為：(1) 能理解坐標的表示，並熟練代數的運算及數的四則運算，(2) 能理解三角形及圓的基本幾何性質，並學習簡單的幾何推理，(3) 能理解統計、機率的意義，並認識各種簡易統計方法。
- 5. 分年細目：**基於 89 暫綱階段的能力指標設計詮釋空間太寬廣，造成學生學習的困擾，92 綱要針對(1)數與量(2)幾何(3)代數(4)統計與機率四項主題訂定分年細目，規範學生每一年應學之數學內容。連結主題部分則訂為察覺、轉化、解題、溝通、評析五項細目。

## (二)高中 95 暫網說明

1. **結構**：高中第一、第二學年採必修制，每學期四學分共十六學分，每週授課四節；第三學年採選修制，分為數學(I)、數學(II)各三學分，上下學期每週授課三節。

2. **必修科目之目標**：(1) 引導學生瞭解數學的內容，意義及方法，(2) 培養學生以數學思考問題，分析問題，解決問題的能力，(3) 提供學生在實際生活和學習相關學科方面所需的數學知能，(4) 培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。

### 3. 必修科目之內容：

第一學年：

- (1) 數與坐標系
- (2) 數列與級數
- (3) 多項式
- (4) 指數與對數
- (5) 三角函數的基本概念
- (6) 三角函數的性質與應用
- (7) 附錄(含認識證明、函數概念及餘切、正割、餘割函數圖形)

第二學年：

- (1) 向量
- (2) 空間中的直線與平面
- (3) 圓與球面的方程式
- (4) 圓錐曲線
- (5) 排列、組合
- (6) 機率與統計(I)

### 4. 選修科目之內容：

第三學年：

- (1) 機率與統計(II)
- (2) 矩陣
- (3) 不等式
- (4) 多項式函數的極限與導數
- (5) 導函數的應用
- (6) 多項式函數的積分
- (7) 附錄(微積分基本定理)
- (8) 附錄二(牛頓法求平方根)

### (三)高職 95 暫網說明

#### 1. 結構：

高職科因主修領域不同，分為數學 A~D 四組，各組每學期數學科學分數有所不同，分述如下：

- (1)數學 A 為醫護、家政類群組的必修課程，每學期 2 學分共 4 學期
- (2)數學 B 為商業、農業、海事類群組之學校本位課程每學期 3 學分共 4 學期
- (3)數學 C 為工業類群組之學校本位課程，每學期 4 學分共 4 學期
- (4)數學 D 為藝術類群組的參考課程，每學期 3 學分共 2 學期。

#### 2. 科目內容：

(1)數學 A (I-IV) (每學期 2 學分共 4 學期)：

- |                  |         |         |          |
|------------------|---------|---------|----------|
| a. 直角坐標系         | b. 三角函數 | c. 式的運算 | d. 指數與對數 |
| e. 直線方程式與二元一次不等式 |         | f. 圓    | g. 排列與組合 |
| h. 機率            | i. 統計   |         |          |

(2)數學 B (I-IV) (每學期 3 學分共 4 學期)：

- |          |                  |           |          |
|----------|------------------|-----------|----------|
| a. 直角坐標系 | b. 三角函數          | c. 三角形的解法 | d. 式的運算  |
| e. 指數與對數 | f. 直線方程式與二元一次不等式 |           | g. 圓     |
| h. 行列式   | i. 數列與級數         | j. 向量     | k. 排列與組合 |
| l. 機率    | m. 統計            |           |          |

數學 C (I-IV)(每學期 4 學分共 4 學期)：

- |          |             |           |           |
|----------|-------------|-----------|-----------|
| a. 直角坐標系 | b. 三角函數     | c. 三角形的解法 | d. 向量     |
| e. 數與式   | f. 複數       | g. 指數與對數  | h. 數列與級數  |
| i. 直線    | j. 不等式與線性規劃 | k. 圓      | l. 圓錐曲線   |
| m. 排列與組合 | n. 機率       | o. 導函數    | p. 積分及其應用 |

數學 D (I-II)(每學期 3 學分共 2 學期)：

- |                  |         |       |         |
|------------------|---------|-------|---------|
| a. 直角坐標系         | b. 三角函數 | c. 向量 | d. 式的運算 |
| e. 直線方程式與二元一次不等式 |         | f. 圓  |         |

#### (四)課綱架構分析—內容主題與能力主軸

由於 95 高中職暫綱之設計是以分年大綱方式編排，與九年一貫之五大內容主題及能力主軸之設計不同。為進行 12 年一貫的綱要評估，我們試圖將九年一貫的內容主題與能力主軸稍作延伸，以納入高中職之內容。這除了可方便我們作一貫性、銜接性之評估外，也可作為未來製作 12 年一貫課程綱要之參考。

我們將內容主題訂為 (1) 數與量 (2) 幾何 (3) 代數 (4) 機率與統計 (5) 數學分析，能力主軸則修正為(1)演算(2)抽象化(3)推理(4)連結(5)解題(6)溝通。

在內容主題方面，數學分析為高中階段新增之內容，主要是微積分及相關的不等式。

在能力主軸方面，前三項是原九年一貫綱要所提的能力主軸。另外，在五大內容主題中有「連結」項目，包括「察覺」、「轉化」、「解題」、「溝通」與「評析」，它們與其他內容主題不同，因此我們認為將它置於能力主軸內較為合適。

以下是延伸 92 綱要中五大主題說明的一些增添說明：

##### 1. 數與量

- (1)數：整數、分數、小數
- (2)量：時間、長度、面積、體積、容積、重量、角度
- (3)數的運算：四則運算、直式算則、混合運算
- (4)算術：立式、解題

##### 2. 代數

- (1)以文字、符號處理數及其運算。
- (2)函數(含數列)：數列與級數、多項式函數、有理函數、指數對數函數、三角函數
- (3)方程式與不等式：一元一次、二元一次聯立、一元二次、二元一次二次聯立、三元一次
- (4)抽象體系與模型：數系、向量空間、線性變換

##### 3. 幾何

- (1)操作幾何
- (2)推理幾何：三角形、平行線、圓
- (3)坐標幾何：三角、直線、空間平面、圓錐曲線

##### 4. 機率統計

- (1)敘述統計：整理、繪圖、報讀、計算基本統計量（平均數、四分位距）
- (2)排列組合：計數原理、二項式定理
- (3)機率：樣本空間、隨機變數、期望值、變異數、獨立事件、條件機率
- (4)統計：抽樣、一維數據、二維數據、常態分配

##### 5. 數學分析

- (1)絕對不等式
- (2)微積分

## 二、美國加州

### (一)學校教育制度

美國是個很大又很尊重地區獨特性的國家，所以要談整個美國的數學教育，似乎需要另一項專門研究了。在此我們劃地自限，只想調查美國加州的現況。而後發現就算在加州之內有一套公定的「課程標準」，但是這套標準只行於公立學校，而這套標準之內仍然保留非常多的地區、學校或教師自主的空間，從一個學區到另一個學區都可能稍有不同。目前這份報告又特定以加州的聖荷西學區 (San Jose School District) 為訪查對象，其中許多訊息是透過與單曉雯的電話訪談得知。

美國的 13 年義務教育從幼稚園 (Kindergarten) 開始 (五歲入學)，小學五年 (Elementary School: 1--5 年級)，初中三年 (Middle School: 6, 7, 8 年級)，高中四年 (High School: 9--12 年級)，合稱為 K-12。幼稚園以下的 preschool 和高中以上的高等教育，則需自費。

政府規定的每年授課天數是 180 日，每週五日，相當於一學年 36 週。並沒有明顯的「學期」：以 2003-04 學年為例，從 2003/08/27 開始，至 2004/06/16 結束，中間扣掉幾天零星的國定假日，又扣掉兩週 Holiday Break、一週 Winter Break、一週 Spring Break，恰好上課 180 日。在課時上，各校擁有極大的彈性，因此必須訪查個別學區、甚至學校，才能獲得具體的資料。

在小學方面，以 Graystone Elementary School 為例，根本不以一節一科目為授課單位。譬如小五學生每天只有三「節」課，第一節 130 分鐘、第二節 75 分鐘、第三節約 100 分鐘。教師主持整個課堂的活動，並分配各種學習的時間分配。

- 1--3 年級每天上課約 275 分鐘，一年上課 825 小時，若以每「節」課 40 分鐘換算，相當於每週 34 節課
- 4, 5 年級每天上課約 305 分鐘，一年上課 912 小時，若以每「節」課 40 分鐘換算，相當於每週 38 節課

以 Graystone 小學為例，其數學時數頗高。雖然教師可以混合各種教材授課，課表上也沒有硬性規定哪一節要教什麼主題，但是原則上 每天都有一小時的數學學習活動。讀者想必明白，美國的小學教師教數學的方式與台灣大不相同，他們的數學課通常有許多的活動設計，可能也伴隨著閱讀、書寫或其他的文化學習。這份報告參考了一位二年級教師和一位五年級教師公告的每日課程進度 (daily schedule)，的確發現她們都明訂了每天一小時的數學學習時段。

至於初中和高中 (6--12)，仍然每年上課 180 天，每天一節 (period) 數學課，每節 50 分鐘。但是因為學制之自由，有些人可能根本不選數學課，有些人可能通過檢定就跳過了某些基礎課程。同樣也是因為官方並無明確規定課程時數 (或者有，但是沒在網頁上找到)，所以在初中方面我以 San Jose 學區的 Bret Harte Middle School 為實際的調查對象。她每天安排六節課 (午前四節、9:27 才開始，午後二節、15:45 放學)，正常來說，每個學生每天有一節數學課，這包括了以下幾種可能：

- 6th grade math
- 7th grade math



- Geometry (8--12 年級適用)
- Algebra I (8--12 年級適用)

但是每週有四天早上，在第一節課的前一節，提供數學補救教學（只有需要輔導的學生才參加）。

在高中方面，我們從 Willow Glen High School 取得課時之樣本，基本上一天七節課，不過每節課的長度不一，平均來說還是可以估計為 50 分鐘。從 Leland High School 參考課程內容，高中四年必修三年數學，所以有些學生可能在高四不修數學。正常來說，每個學生每天有一節數學課，這包括了以下幾種可能：

1. 必修的課程：
  - Algebra 1/2 (8--12 年級適用) 或者 Integrated Math Course I
  - Geometry (8--12 年級適用) 或者 Integrated Math Course II
  - Algebra 3/4 (10--12 年級適用) 或者 Integrated Math Course III
2. 選修的課程：
  - Math Analysis (有一班 Honors class)
  - Advanced Computer Programming
3. 選修並且可以獲得大學學分的課程：
  - Calculus
  - Differential Equations
  - 一門特殊的數學課，開在正式上課前一個小時，由外來的大學教授擔綱

根據一位有十年以上教書經驗的華裔數學教師（專教八年級）的說法，美國的數學教師經常參考新加坡的教材或素材。我們可能要留意這個意見。

## (二)數學科綱要簡介

理念：優質的數學課程對於所有的學生而言是非常重要的，它讓每位學生有機會選擇各行各業。如果數學能被教得好，那麼數學會是一門充滿美與善的學科，而數學本身的邏輯與嚴謹性會使它成為一門深具吸引力的學科。它訓練我們的分析能力，而這樣的能力正是智慧和精確思考的基礎。若要能趕得上全球的經濟發展，那麼現今的學生必須對於數學有深入的理解。數學教育需給予學生平衡的教學課程設計，讓學生嫻熟於(1)運算和推演能力(2)發展概念性理解和(3)解決問題的能力。

目標：長久以來，學校所謂的「數學成就」，校方往往只侷限在某些優秀學生的數學成就上。如今，我們需要一個嶄新的觀點，加州學生必須達到數學課程標準的目標，而且我們將鼓勵許多學生能夠超越課程內的最低標準。這包括：

1. 培養學生具備流暢的基本運算能力。
2. 培養學生對於數學概念的理解能力。
3. 培養學生成為數學問題的解題者：能夠輕易地辨別和解決例行性的問題；而面對非例行性的問題也能找到一些求解的方法。
4. 培養學生能夠使用符號、記號、模型 (models)、圖表和數學名詞，來討論數量、邏輯關係和未知量。
5. 培養學生藉由蒐集資料及分析所得的證據來做數學推理，同時亦提出論點來支持假設

或是推翻它。

6. 培養學生能將數學本身的概念做連結，同時也能將數學與其他學科做連結。

內容主題：幼稚園到七年級課程標準的系統是分年級的，以五個主題來呈現：「數字感」、「代數和函數」、「測量和幾何」、「統計、資料分析和機率」以及「數學推理」。在幼稚園到七年級的每一學年度開始，都會強調一學生必須逐漸增強某些複雜的數學技巧，並且要求他們將個別分離的技能和概念予以連結、統整。

八年級到十二年級各數學學科的呈現不再混合組織，取而代之的是代數和幾何等特定名稱。許多學校以傳統的課程來教導這些內容，有些學校則是透過統整課程來進行。課程內容分成下列幾個部分：代數 I、幾何、代數 II、三角函數、數學分析、線性代數、機率與統計、進階的機率與統計，以及微積分。每一間中學或高中還沒有教授這些科目更進一步的許多內容，此外，各學校及地區會將這些不同科目的教學主題以不同的方式組織起來，例如：許多學校將三角學、數學分析及線性代數的一些內容組織成一個微積分的入門課程 (a precalculus course)；有些地區喜歡將代數 II 和三角學融合在一起教。

表 1 各年級的數學科目分配表

科目	年級				
	八	九	十	十一	十二
代數 I					
幾何					
代數 II					
機率與統計					
三角學					
線性代數					
數學分析					
機率與統計的進一步應用					
微積分					

表 1 是各年級的數學科目分配表，它反映了在各年級的整合課程與傳統課程中，這些科目與各年級的組合關係。淺色的陰影部分代表所有學生都要精通數學的最基本要求；深色的陰影部分通常做為選修，但是如果學生能夠通過低年級的其他科目，而且要繼續學習數學的話，那麼他們也應該要精通選修科目。

當學生深入探究數學時，他們不僅獲得數學原理的概念瞭解，還得到了純粹推理的知識，並且實際經歷了推理歷程。數學課最重要的目標之一就是教導學生邏輯推理，在學習數學情境中本來就會學到邏輯推理，邏輯推理可以用在廣汎的情境，以正確無誤地找到問題的答案。在學生精通了進階的數學科目的同時，他們也學到了其中的數學推理。

### (三)加州綱要與我國綱要之比較與評析

比較

●負數概念加州綱要四年級，我們則在七年級

- 估算加州要求到二位數加減的心算能力，而我們只做到一位數加減的心算訓練
- 加州七年級時能區別有理數與無理數，知道有理數不是有限小數就是循環小數，並能將有限小數化成分數
- 函數是加州綱要的主軸線，從三年級到七年級一路鋪陳過來：3-A-2.0 在情境中表徵簡單函數關係；4-A-1.4 解釋公式進而回答有關數量及其關係的問題；4-A-1.5 能理解等式(如  $y=3x+5$ )有預測的功能；5-A-1.0 簡單式子中使用變數並在坐標圖上繪製結果；6-A-1.0 能解決一個變數的一次線性方程式；7-A-3.0 能繪圖並解釋線性函數和一些非線性函數。我們在六年級的時候有一點簡單的鋪陳，而從七年級時介紹變數、函數概念。函數是由方程式透過隱函數的方式求得，沒有特別強調函數是表徵量與量的關係。
- 從算術轉代數，我國是七年級一次到位，由變數、一元一次方程式到二元一次聯立方程式及其圖形，皆在七年級完成；加州是由三年級開始介紹變數，四年級介紹等量公理，六年級能解決一個變數的一次線性方程式，七年級完成兩步驟線性方程式、不等式，八年級完成二元一次聯立方程式及不等式。
- 加州介紹簡單因式分解並用來化算有理式；我國的因式分解，著重在形式操作，因式分解的應用僅談到一元二次方程式的求根，並未談到化簡有理式。
- 加州綱要於八年級時提到一元二次方程式與物體運動的連結；我國並沒有數學與物理方面的連結。
- 加州綱要推理幾何的目標是做形式的證明，對公設、定理及歸納與演繹推理均以嚴謹方式處理，其內容範圍較明確，包括：三角形全等相似定理、平行線性質、四邊形性質及圓性質的內在定理；我國並未對公設做清楚的交待，九年級對推理的定位是理解，似乎並未明確交代要達到嚴謹證明的要求，推理內容的範圍也較廣泛，較加州多出的範圍包括：直線與圓、兩圓的關係、三角形的內心、外心、重心。
- 加州綱要三角及基本的坐標幾何在九年級介紹；我國則在十年級介紹。
- 加州綱要第一次出現坐標系是在五年級，已包括四個象限，主要內容是描點及繪製函數圖形，同時坐標幾何鋪陳時間很長；我國是十年級才開始教坐標系，直接就進入坐標幾何。
- 加州綱要敘述性統計在七年級已完成；我國七八年級並未安排機率與統計題材，而是全安排在九年級，並且一次完成。
- 加州八年級之後將排列組合、機率安排在代數一、二，另外亦安排機率與統計 I、II，而機率與統計 II 的深度超過我國高中所學範圍。
- 加州的微積分為完整的單變量微積分，我國則定位為多項式微積分。

#### 評析

整體而言，加州綱要屬於較傳統的數學綱要，它有幾個特點：

1. 函數及其應用為它的一個主軸
2. 運算能力被強調，包括十乘乘法表及兩位數加減的心算能力。
3. 強調數學的嚴謹性，從九年級起，對重要定理的證明有適當的安排。
4. 機率與統計的內容相當完備，鋪陳的時程也相當長。
5. 效率高：掌握核心，刪除不必要枝節，高中結束時已完成單變量微積分及機率統計 II。

## 二、新加坡

新加坡的教育重視每個小孩不同的性向與能力，目的在使每個人的潛能得以盡情發揮，以成為未來建設新加坡的棟樑；藉由廣泛的課程以提昇文化水準，並培育其健全的道德價值觀。新加坡學校制度是承襲英國教育制度再加以改革而成，1979年頒布新的學制，為現行學制的基礎，1991年再次修訂，將小學三年級結束後的分級延後至四年級，其餘大致不變。2003年開始執行十年義務教育，包含小學6年，中學4年，以往單純只是由政府補助而非法定的義務教育。新加坡於90年代末期大力推動資訊教育，引進了融合教育與科技的教學方式，試圖激發學生的抽象考與創新的能力。

### (一)學校教育制度

初等教育 (Primary Education) 亦即小學，小學自六歲開始，為期六年，主要教學科目為：英文、數學及母語。新加坡把小學又分成兩個階段。一至四年級稱為奠定基礎階段 (Foundation Stage)。奠基階段的重點在英語、母語及數學能力的培養，另有音樂、工藝、公民與道德、健康教育、社會學科及體育等課程。除此之外，學校也鼓勵學生參加各項課外活動。五至六年級則稱為定向階段 (Orientation Stage)。在小學四年級結束前，學校會依據學生的學習能力，將他們分成三種不同的語文分流課程--EM1, EM2 和 EM3。EM1 及 EM2 同樣都教英語、母語、數學及科學，但 EM1 學習較深的母語，EM3 則學習較基礎的英語、母語及數學。

小學六年級結束前，學生都要參加小學離校考試 (Primary School Leaving Examination—PSLE)，以便鑑定孩子的學習能力，把他們分配到適合的中學課程就讀。

由於「因材施教」的教育政策，新加坡將中等教育 (Secondary Education) 分成特別課程、快捷課程或正規課程。新加坡稱這種學制為「分流教育」，目的就是讓孩子接受最具效率、最適合個人學習能力與興趣傾向的教育。成績最佳者進入特別課程 (Special Course) --- 約 10% 的學生。其次者進入快捷課程 (Express Course) --- 約 40% 的學生，又其次者進入正規課程 (Normal Course) --- 約 50% 的學生。正規課程內又分學術課程 (Academic Course) 與技藝課程 (Technical Course) 兩種。特別課程和快捷課程為四年的課程，正規課程則為五年的課程。在完成中學教育的特別或快捷課程之後，有資格參加「新加坡—劍橋普通教育 (Singapore—Cambridge General Certificate of Education—GCE)」的 0 級證書會考 (GCE O Level)。而參與正規課程的學生則可以參加「新加坡—劍橋普通教育」N 級證書會考 (GCE N Level)，通過後可選擇是否要繼續修讀第五年的中學課程，第五年結束後參加 GCE O Level 檢定。

在 GCE O Level 考試後，依據其性向和條件，可以繼續選擇接受後中等教育 (Post-Secondary Education)，其形式有很多種，詳細內容請參考 [S21]，準備升大學的學生幾乎是選擇進入初級學院就讀，準備兩年以準備「新加坡—劍橋普通教育」A 級證書檢定 (GCE A Level)，其列出可供選擇的科目有語文、數學、科學、商業與電腦、人文科學、其它與本地科目共七大類 [S19]，檢定結果可決定學生是否有資格繼續大學教育 (至少通過兩科 A Level 科目)。

根據新加坡教育部 2003 年統計資料計算得知，中學結束後大約有 11.9 % 的學生進入初級學院與大學先修中心就讀，也就是選擇繼續升學準備進入大學的學生比例。而台灣將近有一半比例的學生進入大學，這點差異極大，明顯觀察到新加坡的確是徹底的精英化。在這當中可以推論中學學業成績需在同屆的前 12 % 才有機會進入高中，即大學預備教育階段。另外，由 2003 與 2004 年 GCE A Level 檢定統計資料得知 [S10]，學校考生通過率高達九成以上，私人報名之考生則不到五成。

## (二)課程設計

各階段的課程設計則參見下表：

教育階段	學年	學習內容
小學 (Primary Education)	六年 (1--6 年級)	修讀英文、數學、華語、科學，於六年結束後參加會考，決定須進入哪一種中學。
中學 (Secondary Education)	四年 (7--10 年級)	有七種課程，即英文、華語、外國語文（泰文、越南文、中文、法文）、數學、科學、地理、歷史、文學史。
初級學院 (Junior Colleges)	二年 (11--12 年級)	進入正式大學之準備課程，分為兩類。 <u>人文類</u> ：數學（Mathematics）、英國文學、歷史、地理；經濟、戲劇、美術與設計、高階中文、馬來語、淡米爾語。 <u>科學類</u> ：數學（Mathematics）、進階數學（Further Mathematics）、物理、化學、生物、經濟、英國文學、地理、歷史、電腦。

其中，中學階段較複雜，一二年級皆為固定的課程，三四年級開始有選修課程，依照不同的分流課程亦有不同的安排。以特別與快捷課程來看，一二年級共同科目為英文、中文、數學、一門理科課程、一門文科課程，三四年級選修科目之要求為：至多四門符合學習能力和興趣的選修課程，包含進階數學（Additional Mathematics）。

新加坡將一學年分為四學期（terms，每學期有 10 週，每年一月初起是第一學期，所以學年與日曆年同步。第一、二學期間，三、四學期間，各休息一週。二、三學期間大約休息四週。第四學期後大約休息六週。

在課時方面，全年上課 40 週，每週五天。小學每節課 30 分鐘，每天十節。中學每節 35 分鐘，每天九節，不同的學校會有小差異。初級學院（相當於我們的高中階段）每節課 45 分鐘，每天節數不固定，從 7 節到 12 節不等，且各班級安排亦不同。此報告參考公立學校 Anderson Junior College 的實際課表。

因為新加坡的教育官方網站並沒有課時方面的資訊，所以簡表中統計的課時，是從某些公立學校的實際課表統計出來的：包括 Anderson Primary School [S12]、Chua Chu Kang Primary School [S13]、Paya lebar methodist girl's school (secondary) [S14]。

此外，我們由課程安排表可觀察出，特別與快捷課程三四年級選修課程包含了進階數學（Additional Mathematics），此階段學生所修習的數學課時會因人而異了，底下表格統計小學一至六年級、中一與中二各科授課節數 [S4]。

#### 小學之授課節數

科目（每節 30 分鐘）	每週各年級授課節數						
	小一	小二	小三	小四	小五、小六		
分流（streaming）					EM1	EM2	EM3
PSLE 的考試科目（EM3 不考科學）							
英文（English）	15	15	13	12	12	13	16
母語（Mother tongue）	14	13	12	11	10	8	4
數學（Mathematics）	7	9	11	11	9	10	13
科學（Science）	0	0	3	4	5	5	3
PSLE 不考的科目（Non-Examination Subjects）							
道德教育（Moral education）	3	3	3	3	3	3	3
社會科（Social studies）	1	0	0	2	3	3	3
藝術與工藝（Arts & Crafts）	2	2	2	2	2	2	2
音樂（Music）	2	2	2	2	1	1	1
體育（Physical education）	3	3	3	3	2	2	2
健康教育（Health education）	0	0	0	0	1	1	1
集會（Assembly）	1	1	1	1	1	1	1
每週全部課程節數	49	48	49	49	49	49	49

#### 初級中學之授課節數

中一及中二（Lower Secondary） 所上科目（每節 35 分鐘）	每週授課節數		
	特選/ 快捷	普通學 術	普通工 藝
考試科目（Examination Subjects）			
英文（English）	6	6	8
母語（特選修高級母語；普通工藝修基本母語）	6	6	3
數學（Mathematics）	5	6	8
科學（Science）	6	5	4

文學 (Literature)	2	2	
歷史 (History)	2	2	
地理 (Geography)	2	2	
藝術與工藝 (Arts & Crafts)	2	2	
設計和科技和家政 (Home economics)	3	3	
電腦應用 (Computer applications)			4
Technical studies & home economics			4
不列入考試的科目 (Non-Examination Subjects)			
社會科 (Social studies)			2
公民與道德教育 (Civics & Moral education)	2	2	2
體育 (Physical education)	1	1	
音樂 (Music)	1	1	
藝術與工藝 (Arts & Crafts)			2
集會 (Assembly)	1	1	1
每週全部課程節數 (Total currriulum time)	40	40	40

新加坡政府設有常駐的課程發展部門，負責定期檢討並長期性地研擬其教育政策與學習綱要。1996年12月1日，原本隸屬新加坡教育部的課程發展會 (Curriculum Development Institute of Singapore, CDIS) 和課程制定部門 (Curriculum Planning Division, CPD)，重新改組為新的兩個部門：教育科技部門 (Educational Technology Division, ETD) 和課程制定與發展部門 (Curriculum Planning and Development Division, CPDD) [S10]。

ETD 主要負責發展全方位的教育科技教材 (資訊科技、教育電視與視聽類)，並於學校中帶領使用，使其在「教」與「學」上發揮影響力。CPDD 則負責設計、重新探討與修訂課程大綱，發展教學教材，將概念化為教學上的產物，並監控課程的完成，結合了 CDIS 與 CPD 的功能，使得學校中的課程規劃、發展與實施有著更密切的配合關係。ETD 與 CPDD 兩大部門將要密切地共同合作，讓多媒體與印刷教材有著連貫一致的發展，而軟體發展將作為課程與印刷教材的補充。

### (三)新加坡教育資訊化的發展

新加坡政府多年以前就已經認識到了教育必須朝向資訊化發展，陸續於1997年與2002年推出了新加坡資訊技術在教育中的應用規劃——MasterPlan，分別稱為MP1與MP2 [10]。

MP1 是新加坡政府為迎接 21 世紀的挑戰而將資訊技術結合到教育中去的規劃。其指導思想是，教育應該不斷地預測未來社會的需求，並為滿足這些需求而努力。未來社會

所需的技能焦點將集中在思考、學習以及交流等方面，基於資訊技術的教和學是年輕一代獲得上述技能的關鍵途徑。該規劃著力於為年輕一代尋求一個走向資訊技術之路的基礎。

在 MP1 實施之始，新加坡教育部首先對國中小教師進行了培養訓練，使他們認識到資訊技術與教育相結合進行教學的樂趣和先進性，從而使得資訊技術成為教師教學的得力助手，最初階段國小在英語、數學、科學和中文等科目引入了資訊技術，中學階段引入資訊技術的科目則更為廣泛。

MP1 明確規定了到 2002 年資訊技術基礎設施的國家標準。學校可以根據自己的情況靈活決定在 2002 年以前的發展速度及硬體資源的分發情況，但到 2002 年每所國中小必須達到國家規定的資訊技術基礎設施的標準，即每兩名學生擁有一台電腦，教師課堂教學應該有 30% 的課時利用資訊技術。

為了達到這個目標，新加坡政府在 1997-2002 年內投資 20 億新元（台幣與新加坡幣之比約為 19:1）以購置電腦，為學校建立全面的網路、開發軟體及教材、教師培養訓練等。除此以外，每年還要投入 6 億新元給國中小做經常性開支（如電腦維護、開發軟體及教師持續培養訓練等）

在 MP1 實施之初，一個全面的教師資訊技術培養訓練計畫就已開始落實。到 1999 年，所有教師都已接受了資訊技術的培養訓練，新教師也都經過了新加坡國家教育學院資訊技術的培養訓練。現在，幾乎每一位新加坡的教師，在課堂教學中都能使用資訊技術，他們不但在教學、交流和行政管理方面使用資訊技術，而且還使用資訊技術設計「學習環境」和「教學過程」。

到 2002 年底，MP1 規劃已基本完成。該規劃的有效實施極大地推進了新加坡教育資訊化的發展，其發展水準置身於世界教育資訊化的前列，新加坡的教育走上了一個全新的發展階段。

第二次的 Masterplan (MP2) 在 2002 年 7 月 27 日揭開序幕，其願景是：建立在 MP1 上，學校應更有效、更為普遍的執行資訊科技教育。在 MP2 實施之下，學校被賦予更多的自主權來主導其資訊科技資源，意味著政府授權學校做更深一層的試驗與整合，這在創新與改革上有極大的幫助，除此之外，在 2004 年更提昇教師數與筆記型電腦數之比例達 1:1 (MP1 為 2:1)，增大了資訊科技教育的普遍性。

MP2 (2003 年~2007 年) 是新加坡教育部針對已具有一定資訊技術水準的新加坡教育推出的，製定了一套完整、系統的方法，將教育中的一些環節——課程、評價、教育指導、帶頭班的發展以及學校文化等與資訊技術更完善地整合起來。

從 MP1 與 MP2 的推展可以看出新加坡教育部大力推動資訊科技教育，實行電腦輔助教學，並在 2002 年完成學校全面網路化，超過 30% 的課程都將運用到電腦。新加坡新課程改革成功的重點是政府強大的支持，包括頒佈了一系列有力的政策，並給予強大的財政支撐。如在教師培訓方面，政策要求每個教師都要學會用電腦，配套保證每個教師擁有一台電腦，因此給予教師經濟資助，每個學校亦配有至少兩位技術支援人員 [S16]。

#### (四)新加坡 1—8 年級數學綱要簡介與評析

「學習型的學校，思考型的國家」為新加坡教育部之願景，此願景為課程注入了三項提



案：思考技能、資訊科技（IT）與國家教育，資訊科技推動著他們邁向以知識為基礎的社會，「幫助人民準備接受未來的挑戰」已變得更加明顯需要，此外為了精通於 IT 的使用，學生必須能夠創意地思考、獨立地學習與成功地在團隊中工作，基於以上所提，當新加坡經濟邁向全球化之際，人民必須擁有強烈的家園與國家歸屬感，在此背景與期盼的教育成果之下，新加坡重新修正數學綱要。

此份數學修正綱要反映出現今數學教育的發展，其焦點專注於數學解題（Mathematical Problem Solving），重心在概念、技能與其基礎過程的發展，並結合「思考技能與資訊科技在數學教學上的整合」，將給予力量來發展數學問題的解決 [S5]。

在綱要簡介中提及「國家教育」這一項，看出政府希望辦理全國統一標準的學校教育，從其歷史角度觀看，新加坡與英國相似，以往的學校多屬私營機構，所以在他們的社會裡面，政府干預教育的層度是非常低的，1990 年代開始，英國正處教育改革之時，曾經稱讚台灣、日本與南韓的教育制度，其稱讚的重點之一是幾乎所有的中小學都是公立學校，此項優點為全國國民擁有「一致的標準」與「公平的機會」接受教育，於是英國教改有一個明顯的轉向：將學校由私營改為公營，從極度的分散、分權要漸漸改為中央集權，統一管理。新加坡顯然與英國一樣歷經這樣一個逐漸改變的過程，我們也可以說這是一個很有趣的全球化結果，自從資訊發達以後，每個人、每個團體甚至於每個國家，都會觀摩別人怎麼做，接著修正自己，最後都會大家都趨於一個共同的形式。所以在「國家教育」這一項提案中，反映了新加坡的教育改革歷史，其教學初始是沒有全國一致的標準，教育部則在 2001 年正式推出了一到八年級的教學大綱。

就此份文獻本身來看，數學綱要在小學部分沒有直接使用 IT 相關之資訊。明白指出要使用計算器是從中一開始，其中較特別的是在小學附錄 B 部分有提到要使用算盤來計算加減，並做詳細解說，如操作方式與使用技術。算盤是非常具體的操作物，就如同我們國內課本所輔助使用的花片與撲克牌，皆屬於操弄性材料，學生可以操弄這些教材，以便考察抽象概念和具體事物之間的關係，並立即以實徵結果來檢證其假設 [S2]。

關於 IT 的相關訊息，從 2003 ATCM 國際研討會（第八屆亞洲科技與數學研討會）與新加坡教育部之 MP1、MP2 計畫中，得知政府資助教師購買筆記型電腦，並積極鼓勵教師將 IT 帶進教室，利用電腦軟體或網路來呈現一些課題。我們可以想像在數學課堂中不見得可以全面適用，但對於較複雜的計算，或者為快速地表現統計數據與幾何相關問題上，是值得把 IT 帶進教室來做教學輔助工具。IT 的推展是全面性的，不僅僅在數學，而是融入在各科目的課程，讓學生從小學開始在教室中就看到與接觸到所謂的 IT。參考 2002 年由 SNP Panpac 所出版的中學教科書，在每一章的內容都有「IT Corner」這一小單元，教導學生如何在電腦相關軟體中輸入數學符號如「+、-、\*、/、^……」等等的 IT 相關補充。

新加坡小學階段的數學綱要內容，分成兩部分來寫。在 A 部分解釋了綱要的哲理與期實施的精神，並且詳加說明了數學綱要的目標。數學綱要所呈現的的框架概述了學校裡數學教學和學習的精髓，各階段的數學學習包含了基本概念的取得與其實作技能，它也包含數學思考的理解、一般問題的解決策略、擁有對數學的積極態度和欣賞能力來作為在日常生活中一項重要、強而有力的工具，這種框架形成學校中數學教學的基礎。

此綱要分別在基礎階段與定向階段中，概述其目標以提供各階段關於概念與技能的總覽。

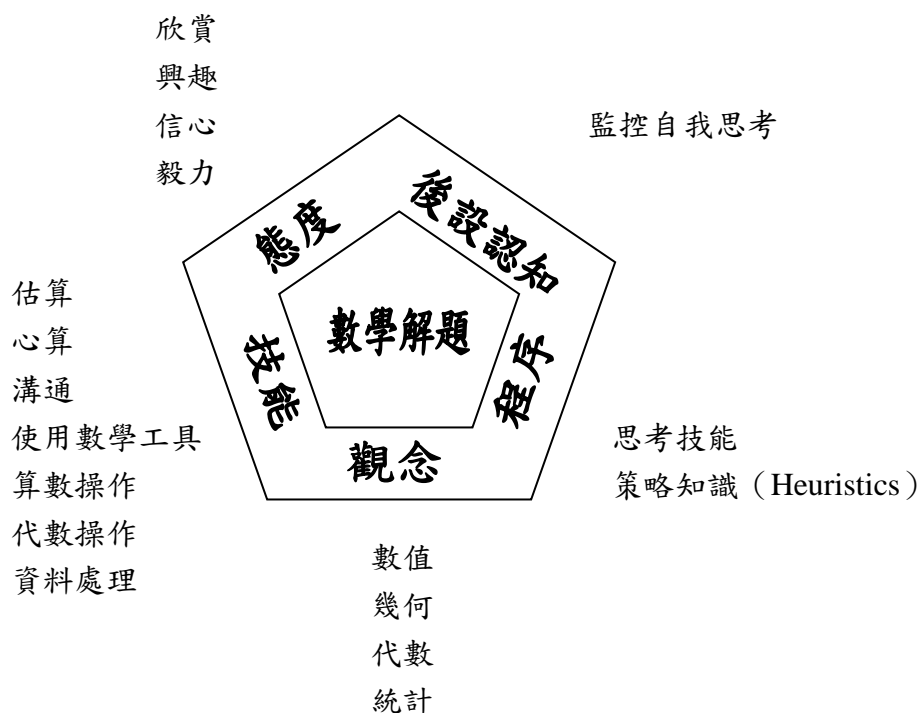
至於 B 部分則詳列了各階段的學習內容，並謹慎確保小學至中學的連貫性。隨著每一主題深度的增加，採取螺旋式 (spiral approach) 安排，讓每個主題在各個階段適當地重複被提及，使學生能夠鞏固學習的概念和技能，並且發展更進一步的概念和技能。也因此能看到在綱要中相同的主題重複出現在不同的年級，但是複雜度與深度不同，所有主題都有「學習成果 (Learning Outcomes)」此一部分來讓老師監控學生的進展，而「Remark」這一欄則為提供教師說明大綱的一個指引。

這份大綱是提供教師計畫他們數學課程的指南，教師不必受這裡所提出的主題順序約束，但是應該保持層級性 (hierarchy) 和連結性 (linkages)，並靈活及創意地教學。

新加坡數學教育目的是使學生能夠達到以下目標：

1. 獲得並且應用生活中所碰到關於數、測量和數學情境空間之技能與知識
2. 獲得為在數學和其他學科方面的深造所必要的數學概念和技能
3. 發展邏輯演繹和歸納的能力，透過數學問題的解決解釋他們的數學思考和推理技能
4. 確切、簡明且合乎邏輯地使用數學語言傳達數學想法和論證。
5. 發展對於數學的積極態度，包含信心、樂趣與毅力。
6. 欣賞數學的威力與結構，包含樣式與關係，並加強學生的智能上的好奇心。

在中小學階段的數學教育列出以上六大目標：分別屬於認知、溝通、與連結的能力，最後一點提到能夠欣賞數學的威力與結構。在此「數學結構」包含了樣式與關係，這一思維放在小學裡面，可察覺它是為了將來作為了解「數學函數概念」的一個前置經驗，美國加州、韓國、日本、中國大陸等國家同樣有類似安的安排。



【新加坡數學課程框架圖】

從數學課程的框架中觀察到，新加坡 2001 年這一份數學綱要是以「數學解題」作為一個核心價值，而在此核心支軸四周放置了五個面向的概念：態度、後設認知、程序、觀念、技能，從教育心理學的觀點來看，「學生需要了解什麼才能解數學問題？」這個問題的答案包含了四個成分。語言及事實知識：用來幫助學生把問題的每一個句子轉譯成內在表徵。基模的知識：用來幫助學生把資料加以整合使成為連貫一致的表徵。策略的知識：用來幫助學生想出和監控解題計畫。程序性知識：用來幫助學生執行解題計畫中所需的演算 [S1]。新加坡數學課程框架即建構在上述的模式中發展出來。

底下分別就這五個概念所提出的小項目詳加論述，並與台灣做比較。

### 觀念

我們可以把觀念這一項視為台灣的內容主題，新加坡將其分成數值、幾何、代數、統計四大類。代數這一項正式列出是從小六才開始，新加坡談的代數更形式些，須提到未知數、變數與方程式才將之視為代數，因此在這種意義上，他們安排代數是從小六開始。台灣則把加法的交換性視為代數主題內，所以小一就開始有代數部分，但觀察新加坡綱要內容，小一在整數部分便已出現  $3 + \square = 12$  這樣一個式子，雖然未強調符號類化與未知數之想法，但已間接為代數做了鋪陳，台灣則是從小二開始使用  $8 + (\ ) = 13$  之式子，小四才逐漸做符號的類化，將括號以  $\square$ 、甲、乙……等符號做取代。

新加坡與我們相同的是小一都有統計，不同的是台灣只要求學生做初步的分類與表格製作與說明，而新加坡除了分類與表格製造外，更進一步明確要求讀懂並解釋圖表，

是項更有意義的學習，值得我們參考。

四則運算屬於「程序性知識」，新加坡綱要在設計與教學上有幾點和台灣明顯不同的地方，詳細討論於下：

1. 新加坡一到五年級藉由控制位數，格外細緻地安排整數、分數、小數的階段性運算學習，以整數部分為例來看其進展：小一是安排 100 以內的加減，40 以內的乘法，除數不大於 20；小二是三位數以內的加減，2, 3, 4, 5, 10 等數字的乘除，並未一次說完所有的乘除數字，其中的 10 不只是訓練乘除運算，其重點在於導引學生對於數字上位值 (place value) 的概念，這一點是值得我們參考的，台灣在位值觀念上的鋪陳與準備顯得稍微少了些，因為到小數的部分一定要有位值的觀念才能夠說清楚，因此我們可以參考新加坡使用這樣的方式來幫助學生發展位值概念；到了小三是四位數以內的加減，完整的提出  $10 \times 10$  乘法表，三位數乘、除以一位數；小四是四位數乘以一位數，三位數乘以兩位數，四位數除以一位數或 10；小五是四位數乘、除以二位數。

由此精心的安排，看出新加坡極注重訓練小學生的基礎計算能力，除了動筆運算外，在綱要中也特別強調必須同時培養心算能力，讓學生在初始階段紮實地打好最基本的運算能力，以期達到自動化地執行算術及代數程序，相較之下，台灣、日本、韓國與中國大陸在這方面的安排，都值得觀摩新加坡。從這一項也明顯觀察到新加坡所採用的「螺旋式」安排，此種教學設計的重點，在於轉回原地時，應提供相當有意義有高度的提升，人的學習過程並不總是直線前進，尤其是數學科，經常需要回顧，來回跳躍，舊有的經驗可以幫助我們學習新的事物，架構在這樣的基礎上可以提高學習的紮實性，因此新加坡數學綱要特別明顯強調在每個新的學習階段適度地重複前一階段內容，對於其它主題也有同樣安排。

2. 另一項特點：台灣、韓國、日本與中國大陸皆是使用  $9 \times 9$  乘法表，新加坡較特別，是使用  $10 \times 10$  乘法表。
3. 新加坡在小一後半學期就把加減乘除一起提出，小一的除法是配合圖像使用均分的概念來解說，正式引入  $\div$  符號是在二年級，乘除互逆的在此可開始發展；台灣則是在二年級才開始教導乘法，三年級教導除法，明顯較新加坡慢。
4. 直式算法的引入，台灣綱要則於二年級的加減就列出，新加坡綱要中並沒有特別提到「直式計算」一詞，翻閱其教科書，發現是在三年級才一起出現四則的直式運算。
5. 對於四則運算的教學，新加坡有一項很大的特色是運用圖像來輔助教導數學符號的抽象概念，所有的加減乘除例題都配合著圖示說明，先將「個、十、百、千……」各位置區隔出來，並將各位置所代表的數字以立體方塊個數來表示，在計算過程中配合著圖示將方塊做位置的橫向流動，讓學生更具體的體會如數字進位的類似變化，在四年級的小數運算上亦運用了同樣的方法，這一點也是值得我們學習與參考的教學方式。擷取教材中之例題如下圖所示：

Thousands	Hundreds	Tens	Ones

Then subtract the **hundreds**.

$$\begin{array}{r} 45^1 0^1 1^3 4^1 6 \\ - 2598 \\ \hline 548 \end{array}$$

10 hundreds - 5 hundreds = 5 hundreds

Thousands	Hundreds	Tens	Ones

Lastly, subtract the **thousands**.

$$\begin{array}{r} 45^1 0^1 1^3 4^1 6 \\ - 2598 \\ \hline 2548 \end{array}$$

4 thousands - 2 thousands = 2 thousands

取自 Math-3A[S17]

Ones	Tenths	Hundredths

First divide the **ones** by 5.  
 $7 \text{ ones} \div 5 = 1 \text{ one R } 2 \text{ ones}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5 \overline{) 7.75} \\ \underline{5} \\ 2 \end{array}$$
  

Ones	Tenths	Hundredths

Regroup the remainder  
 2 ones to 20 tenths:  
 2 ones 7 tenths = 27 tenths

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5 \overline{) 7.75} \\ \underline{5} \\ 27 \end{array}$$

取自 Math-4B[S18]

### 技能

技能方面，除了我們所熟之的加減乘除、代數操作與處理資料的能力（機率與統計）外，還看到新加坡特別強調「估算與心算」能力，要求在合理的時間內完成這基本的計算，從綱要內容也可觀察到，從頭到尾的確是一致地在貫穿這件事，其中值得注意的是，估算並未從很小就開始，與台灣、中國大陸相同是從小四才開始的，小四前著重在精確計算的能力，而這部份是估算的基礎，如此的安排是合理的。

### 程序

在程序這部分提到到兩項，一是將思考技術放入數學課來學習，這也是綱要簡介所提的

三項提案之一，另一項提到的是策略知識 (Heuristics)，或稱為捷思法。所謂的思考技能，在綱要的附錄 A 中做了一番詳細的說明，包含以下各項：

1. 分類——使用適當的歸因來做分類、組織、歸類資訊
2. 比較——使用一般的歸因並透過多套的訊息來區別共同性與差異性
3. 排序——透過可量化的值，安置項目於一分級的順序中
4. 個體與整體的分析——辨認並清楚說明形成整體的部分
5. 指出樣式或關係——在產生一個可信賴或可重複之計畫的一種關係裡認出在兩個或更多屬性之間的具體的變化量
6. 歸納——從聚集的線索描繪出普遍的結論
7. 演繹——從給予的歸納推論各種特殊情形或例子
8. 圖表化 (空間想像 Spatial Visualisation) ——想像一個情境或物體，並在內心操作關於問題解決的不同選擇

在解題策略上，亦具體列出了其意涵：

1. 算算看
2. 使用圖表
3. 做一有系統的列表
4. 尋找樣式
5. 知道結果後，倒推回去，與前題拉上關係
6. 使用前後概念
7. 猜猜看並檢驗
8. 做假設
9. 設法把問題換一形式，這是一個高竿的事情。
10. 簡化問題
11. 做特殊解

### 態度

指出數學學習上的情感觀點

1. 享受數學
2. 欣賞數學的美與威力
3. 在使用數學上展示信心
4. 問題解決的堅持

### 後設認知

台灣和其他不少國家綱要喜歡談及學習認知或是認知心理與建構論，而新加坡則完全沒提及這些，他直接談的是後設認知，值得我們欣賞之處是他不談理解、學習、建構等抽象的事物，而是務實地解釋出三種具體行為是他所謂的後設認知，第一種是較偏向心理層面的，指出當學生在執行一解題動作時，要持續且有意識地監控著他自己的思考程序與策略，這是後設認知很標準的一個解釋，亦即一個人對自己認知歷程的知識和覺察，其技巧包括理解監控、自我檢核，即依不同的目標調整實作表現 [S1]。第二與第三種是



在學習數學上很有實際用處的兩個解讀，一個是在整個解題的思維當中，隨時去尋找是否還有其他的辦法，是否有另類的、其他可能性的辦法來解決同樣的問題，來達成同一個目標，另一個是解題完在後設認知心理層面上的一個訓練，檢查自己算出來的答案是否合理、是否適當。這些是他們在談後設認知上的確實描述，因為大部分讀者對於此一心理學上的名詞並不熟悉，所以新加坡在這方面很務實地明確定義其所指的三項行為。

整體來看，其數學解題的對象是數學家常說的：內外的應用，對外而言包括了生活中的問題，對內而言是數學本身解題的問題，包含了內外兩部分才是完整的數學應用。新加坡綱要中將解題列為三個層次，第一為最基本的、要求在合理的短時間內完成例行的問題，第二是非例行、樣式較奇怪的問題，第三是開放的問題，除了不熟悉外，可能是沒有標準答案、需要探索與研究的問題，新加坡認為在數學解題核心概念之下需包含這三層次的問題，小學階段大部分是屬於第一層次，中學開始引入二、三層次，參考 2002 年由 SNP Panpac 所出版的中學教科書，在每一章的最後一部分為極具深度與趣味性的「挑戰題」，訓練學生思考的靈活性，以往台灣使用的暫綱所顯示的數學問題絕大部分屬於第一層次，較少有達到第二第三層次的機會，新加坡在這一點很大膽的去嘗試，在教科書中置入一個挑戰天地，提供更深與更廣的空間給予能力較高的學生。

新加坡課程綱要的一項特色是會配合分流而擬定兩種、甚至三種課程標準。另一項特色，是新加坡小學數學綱要在最後面列出研究文獻，其他國家皆無列出。

以下我們分幾個主題，評析新加坡小學階段數學教育的特點。

### 幾何圖形

幾何這部份韓國、日本與中國大陸有共同的特色，皆先從認識立體圖形開始，三四年級介紹平面，五六年級再回到立體。這種安排可以想像其合理性，因為人眼睛直接看到與接觸到的東西都是立體的，要介紹平面反而還隔一層。但新加坡並未這樣安排，一開始就按照邏輯性的先安排基本的平面圖形，如長方形、正方形、三角形跟圓。台灣則在一年級同時介紹平面與立體圖形。在圖形介紹中，值得一提的是有不少國家在早期只談四邊形或四角形，沒有明確的區分正方形和長方形，到後期才作區分，而台灣與新加坡一開始就已區分出來。

### 樣式

新加坡與韓國小一就開始讓學生認「樣式」。新加坡是單純用圖形、顏色與大小等屬性來介紹，韓國則多加了「數」這一項，對於尚未非常熟練「數」的小一來說，新加坡的安排看來更為適當。二年級則提高了二維思維度上之複雜性，增加「方向性」，並同時使用任兩個屬性來做訓練；中國大陸與日本則是在中年級才提到；台灣則無特別提出。新加坡二年級有一特色，在分數主題裏已教導「等分」，幾何上接著將此概念融入圓形圖內，特別提出半圓和四分之一圓。瀏覽其他國家，很少會特別列出這一項。

### 分數與小數

新加坡的分數是從小二開始，進展速度緩慢，二年級內容為等分、同分母分數的比較與排序；三年級內容為了解相等的分數，也就是基本的擴分與約分，異分母的比較與排序；

四年級內容為同分母分數的加減，分數乘以整數；五年級為更複雜的加減乘運算，並引入分數除以整數，此安排也同樣是一層一層的螺旋設計。台灣明顯不同之處是小三已開始同分母的加減運算，較早進入分數的計算，而分數的四則混合計算則是在小六才完成。至於新加坡的小數，是從小四才開始，進展速度較快速，一開始就安排三位小數；台灣則是小三先接觸一位小數，小四再進入二、三位小數。新加坡綱要在內容安排上顯示出學習效率，於小數前的計算內容鋪陳恰當，讓學生的學習速度增加，小四第一次接觸小數就到達三位，同時談到估算部分。台灣以往的暫行綱要較不注重學習技巧，我們都同意學習技巧不可太過強調，但若太過壓抑則會降低整體的學習效果。

在這當中另一項值得注意的是台灣於小六列出了除數為小數或分數的計算，如何使用一個具體情境來清楚表明除數是分數或小數的意思，在教學上對教師是一大考驗，新加坡卻不費力氣在小學教導這一項，而是安排在七年級解方程式的層次才引出，如求解  $\frac{1}{2}x + 5 = x - \frac{1}{3}$ ， $2 + 0.6x = 2x$ ，這是一個形式化的工作，就學習的歷程來談，這樣的處理方式是較自然的，其目的就是為了解方程式，不需絞盡腦汁在小學階段說明其動機，這是值得我們參考的一項課程編排設計。

### 面積計算

台灣在面積計算與單位換算上安排於二年級至五年級，新加坡則是於三年級一次講完，從這點值得我們思索，其實「面積計算」這是一個單一概念，不需使用到螺旋式，而台灣各年級安排的差異點在於「單位」間的換算，從直向角度觀看，其實都是同樣只用了面積計算的概念，沒有深度上的增加，從橫向角度來看，不妨學習新加坡可縮短學習時限，在內容上則同時的發展單位換算。

### 時間

關於「時間」的教學安排台灣與新加坡大致相同，差異較明顯的是在「24 小時制與 12 小時制的轉換計算」上，台灣較早學習，放在三年級，新加坡則在六年級。

### 圓周率

對於  $\pi$  的使用，日本人在教科書編排上曾爭議要使用 3 還是 3.14，台灣則明確使用 3.14，新加坡很特別，直接使用有理數  $\frac{22}{7}$  來表示  $\pi$ ，這是阿基米德的估計，也是祖沖之的『疏率』。我們都知道這個歷史故事，卻沒有想到可以放到教材裡面，這一點也值得我們參考。

### 配合分流制度的綱要設計

依照新加坡的教育制度，小四結束後開始分流，依學生的成績表現來做能力分班（分為 EM1、EM2 與 EM3），因此五、六年級的數學綱要分為兩份，EM1 / EM2 的學生使用同一份，EM3 則使用較簡單的一份；中學則分 Spacial / Express、Normal Academic 與 Normal Technical 三部份，於是取 EM1 / EM2 和 Spacial / Express 來比較。EM3 五年級的內容幾乎是著重在複習前面所學，六年級一樣安排新進度，但相較之下內容較少。新加坡



的確落實了「因材施教」的理念，性向較強的人給其發展空間，學習較慢的人則單純要求基礎知識的學習。換個角度想想，這也是一種社會關懷的表現。

初中階段的數學綱要書寫體例與理念說明等，皆與小學相同，不再贅述。以下仍是選擇幾個主題，分別比較新加坡和台灣的異同。

### 計算器、計算機與電腦軟體

新加坡和其他國家一樣中學一年級開始使用計算機，不同的是明確強調使用「科學計算機」，必須要有平方根、三次方根、指數、對數、三角與反三角函數的計算。於七年級提出無理數，可見此時已完成了實數系統；台灣則在十年級才出現無理數。新加坡八年級提出線性與二次函數及其圖形。就幾何上來看這一點，只有中國大陸與英國與其類似，要求學會作圖與基本平面幾何證明以外，還學習平面或立體圖形的翻轉、平移、旋轉、放大縮小對稱軸。這些學習配合計算機更有效率地呈現，亦落實將 IT 帶到教學過程中。另一方面值得我們思考的，是把這種較屬於動態與操作的幾何放在數學課程裏面，更大的意義與價值是讓學生做好準備，因為將來若接觸到 3D、立體的電腦繪圖、設計軟體，便需要在電腦的平面螢幕上創造立體的結構模型，此刻就使用了大量的上述幾何概念。這種幾何知識的準備，已超出了為數學或物理學習來做準備的目的，還為了一個特殊的、或許將來很需要的計算機技能：3D 操作或特殊動畫的設計與製作。台灣在這方面的幾何訓練安排較少。

在使用科學計算機上，新加坡與英國類似，指出了學習指導要領，包含兩件事：1. 學生要有能力從計算機算出的真確答案，用自己的估算能力來估計答案是否合理，綱要中明確舉例，如  $47600/85$  應為六百多，而不會是六千多，學生應該要有判斷的能力，而不是單純的「按」計算機。2. 學生要能根據目前的狀況自己決定大概在第幾位取一個概數，舉例像談汽車的速率，若要計算到小數點以下第五位就太荒唐了。此兩項具體說明的指導要領值得參考。

### 方程式

台灣於七年級同時提出一元一次與二元一次方程式，並發展到求解聯立式，採速戰速決式，與其他國家明顯不同，新加坡、韓國、中國大陸與日本均是依次安排於七到九年級。這點值得我們深入探討，六年級學生剛起步學完未知數、變數極簡單的代數式，七年級學生是否的確具備足夠的能力與思維，一口氣接受一元一次與二元一次方程式，甚至到達解聯立方程式階段，在學習上是否會造成學生的沉重的負擔，是我們需要謹慎思索的地方。

### 數列

新加坡八年級談到數列，是其他國家都沒談到的，要求學生寫的出數列的一般式。這項目放置於方程式、甚至是函數以後，可想是合理的事情，因為數列其實就是一個以正整數為定義域的函數，他們在前頭已經學了不少關於「樣式」的認識。此刻前置經驗已經足夠，所以在八年級可以到達這個程度。先認識數列，使得其未來要學極限和級數有更多的準備，這也是新加坡螺旋式的設計之一。

## 多項式分解與合成

有趣的是各國在其綱要都有列出幾條多項式的分解或合成公式。新加坡列了兩條，日本列四條，中國大陸列四條，韓國列六條。受比較的各國在因式分解上的著墨都似乎沒有台灣多，就算有提到公因式與公倍式，也沒有提到最大公因式和最小公倍式，當然也就沒有多項式的輾轉相除法了。

## 教學深度

在其綱要的 Remark 欄位均會特別列出不提的範圍，讓教師清楚需教到何種程度停止。如以下綱要內容：新加坡在八年級”有限度”的談到有理函數，所謂有限度指的是分子為「一次式、分母為常數」或「分子為常數、分母為一次式」。

在相似與全等上，要求學生辨認出什麼樣的圖形是相似或全等，亦明白地說出不在八年級講 AAA、SAS 那樣的判斷方法，九年級才提出，這點較台灣慢一年。在幾何上察覺出新加坡在觀念上的進展蠻深，包括像鏡射、旋轉、平移、放大與縮小，也一樣特別說了某些是不要求的，看得出其用心規劃，希望把注意力放在比較深刻的觀念上，因為這些東西可以轉變得非常刁鑽，因此其綱要內會特別限制。同樣一個思維哲學，他列了畢氏定理，甚至於提出畢士定理的逆定理，很少國家專門談到這件事，他也明白說了不須證明，而是要求學生給邊能求出三角的值，給角能求出邊，從這裡也間接看出他的計算機的確須要有反三角函數的按鍵。

由以上內容實際觀察到新加坡在設計綱要內容上，會給予一個明確的教學尺度，讓大家更放心地按照綱要指示遵循。

## Normal Academic 與 Normal Technical 的分別

以上所談皆為新加坡中學數學綱要 Spacial / Express 部分，至於 Normal Academic 之內容，相較之下則減少一些，如三角，指數、解一次多項式方程式……等，增加的是財務數學，學習單利與複利的計算，放入這一級學生較實用的教材。Normal Technical 內容又更少，拿掉全等、相似、作圖，學習進度也較慢，多了娛樂數學，其所指的並不是真的數學形式的題目，而是如謎題之類的數學題目。

## 階段與主題

台灣將九年國民教育區分為四階段：階段一為「一至三年級」，階段二為「四、五年級」，階段三為「六、七年級」，階段四為「八、九年級」。新加坡雖無直接說明階段性，但依其分流制度，從綱要中可觀察出中二以前大致分為四階段：階段一為「小一、小二」，階段二為「小三、小四」，階段三為「小五、小六」，階段四為「中一、中二」。

台灣將數學內容分為數與量、幾何、代數、統計與機率、連結等五大主題，一至九年級是一致的按照此五大主題分類。新加坡則配合其分流制度，不同階段有不同的分類：

## 【小學、初中】

新加坡	基礎階段 Foundation Stage	小一、小二	整數，錢幣與測量，統計，幾何，分數
		小三、小四	整數，錢幣與測量，統計，幾何，分數，小數
	定向階段 Orientation Stage	小五、小六	整數，錢幣與測量，統計，幾何，分數，小數，平均、比率、速率，比、比例，百分率，代數（代數是於小六才放入）
	Lower Secondary School	中一、中二	算術，測量，代數，繪圖，幾何，統計，三角，問題解決

### (五)新加坡後期中等教育的數學綱要簡介與評析

到了後期中等教育階段，新加坡不再有國家課程標準，而是務實地以國家級考試標準來領導教學。考試綱要的內容均為階段性概括描述，例如中學四年/五年階段結束後所接受的 0 級考試大綱 (GCE Mathematics O Level Syllabus)，初等學院二年 (後中等教育) 結束後所接受的 A 級考試大綱 (GCE Mathematics A Level Syllabus)，文中並未細緻地分年探討，單純以數學項目做分類，如函數繪圖、代數操作、三角。因此在這份綱要比較中，從 0 級考試大綱抽出 9 與 10 年級，主要是依據新加坡 2005 年市面上一般大眾使用的教科書來參考進而做年級分類；從 A 級考試大綱分出 11 與 12 年級，主要是參看 Meridian Junior College 的數學課程安排。於此所參照的教科書出版社為：小學—Federal，中學—Shinglee，高中—Pan Pacific。

綜而言之，在 9 ~ 12 年級部分，新加坡以其考試綱要來主導數學課程，9~ 10 年級涵蓋在 0 級考試綱要中 (少部分學生多學一年才參加 0 級考試)，11 與 12 年級為參考 A 級考試綱要。本報告主要取其科目代碼為 4017、4018、9233 的三份考試綱要來與台灣 95 年高中暫行綱要做對照。9233 內容分為三部份：純數學、力學、機率與統計，此處對照只取其純數學與機率與統計兩部份。至於授課內容，也沒有無詳細解說各項目歸屬哪一年級，在課程安排上依不同的教材、不同的學校有所差異。以公立學校 Meridian Junior College (兩年制) 為例，其規劃是將純數學安排於 11 年級，力學與機率統計部分安排於 12 年級。

其實 A-level 考試的數學科標準，除了 9233 以外還有 9234。端詳其內容，9234 綱要在深度與廣度上超越台灣高中許多，而幾乎等於大一微積分與部分普通物理的內容。因為新加坡的教育體系受英國影響很多，所以他們的 A-level 考試本來應該對應第 13 年，也就是大學一年級。因此，像 9234 這種大學水準的課程綱要就可以理解了。因此我們不能因為 9234 綱要而斷言新加坡或英國的高中教育，平均而言，超過台灣許多；這樣的比較就顯得不公平了。當然，像 9234 這樣水準的數學內容，在新加坡與英國，的確有一部份性向適當而動機強烈的學生可以在相當於高三年齡學完，這是高效率教育的一種表現。不過那是另一個議題，此報告基本上沒有拿 9234 來比較，只擷取了適當的一小

部分。

### 力學植入數學課程中

在新加坡 A 級的二份綱要中很明顯觀察到，理組學生的數學課程較文組學生多了物理中力學這一部分。翻閱其教科書，力學的確是置於其中的正式單元，這也是與台灣很大不同的一點，台灣把物理和數學兩科完全區隔開，只有在少部分應用問題中呈現物理現象。新加坡則在力學這一單元充分讓學生運用數學課程所學來解決物理問題，如利用三角、向量、極限的概念、微分與積分，計算物體運動的相關問題、功與能、質量中心……等等。這不禁讓我們產生些許反思，高中階段的學習過程中，對於理工科學生，在數學或物理，甚是其他學科領域上，難免出現讓學生背得頭破血流的公式，是種額外的沉重負荷。其實大部分情況，只要配合微積分上所學，解決過程就可「執簡馭繁」，穿越表象掌握本質，也讓學生實際體會數學的應用與其重要性。這或許就是新加坡將力學植於數學課程中的用意。許多工程與科學的確難與數學分離，力學中的一部分則展現了微積分上漂亮的應用，我想新加坡的物理與數學教師群應該是達成某種程度的共識後，同意將這部分放入數學課程。就如同我們在大學所使用的微積分原文書中，不難發現在積分的應用上，會發現力矩與質量中心等物理單元的蹤跡。至於實施上，顯然要求了教師的能力：新加坡高中數學教師除了本身的數學領域外，亦須具備有物理基礎，特別是力學。

### 課時

台灣於 10、11 年級必修課程安排每週四節數學，12 年級選修課程安排每週三節數學。新加坡以公立學校 Meridian Junior College (兩年制) 為例，文組學生之選修數學為每週三節正課、三節演習；理組學生必修數學 (9233) 為三節正課、三節演習，選修數學 (9234) 為三節正課、三節演習，一週最多高達十二節，為台灣的三、四倍。對照新加坡綱要，內容之深度與廣度的確需要大量的課程節數來配合。就同一所學校與其他科目做橫向比較，物理為每週三節正課、二節演習、二節演練，化學為每週三節正課、二節演習、一節演練。由此可觀察到，加選數學 9234 的學生，其數學上課節數將近是其他理科節數的兩倍。

至於主題的分類，台灣與新加坡在高中階段都直接以數學課題來分類。我們列表於下：

	分類	主題
台灣	第一學年	數與坐標系、數列與級數、多項式、附錄 (認識證明)、指數與對數、三角函數的基本概念、三角函數的性質與應用、附錄 (函數的概念、餘切函數、正割函數和餘割函數的圖形)。
	第二學年	向量、空間中的直線與平面、圓與球面的方程式、圓錐曲線、排列組合、機率與統計 (I)。
	選修一	機率與統計 (II)、矩陣、不等式。

	選修二	多項式函數的極限與導數、導函數的應用、多項式函數的積分、附錄一(微積分基本定理)、附錄二(以牛頓法求整數開平方根的近似值)。
新加坡 9 2 3 3	純數學	函數和繪圖、部分分式、不等式，模函數、對數函數與指數函數、數列和級數、排列與組合、三角比、三角函數、微分、積分、向量、數學歸納法、複數、曲線之描繪、一階微分方程、數值分析。
	粒子力學	力與平衡、直線上物體的動力學、牛頓運動定律、能、功和力、在多變力(variable force)下的線性運動、拋射物的運動、虎克定律、環形運動。
	機率與統計	機率、離散隨機變數、常態分配、樣本、隨機變數之線性結合、連續隨機變數、假設檢定。
新加坡 9 2 3 4	純數學	多項式和有理函數、極坐標、級數之和、進階數學歸納法、微分與積分、微分方程、複數、向量、矩陣與線性空間。
	力學	動量與推力、環形運動、共面力下物體的平衡、物體的旋轉、簡諧運動。
	統計	分配的進階計算、常態與 t-分配的推論、卡方檢定、雙變量資料。

#### (六)1—12年級分五大主題的簡介與評析

以下我們依本報告所擬定的五大共同主題，列舉新加坡數學綱要中之主要值得參考的設計。詳細比較表，請看附錄二。

#### 數與量

1. 在位名上，台灣 4 年級教到億、兆，新加坡到 5 年級則只教到千萬，也許這是幣值差異影響所致。
2. 在錢幣介紹上，台灣單純使用「元」，新加坡則使用了「元」和「分」混合單位。
3. 台灣與新加坡皆介紹了數的順序，然而新加坡綱要中提及了基數(Cardinal numbers)與數列兩詞，台灣則無特別強調此差異。
4. 在四則運算上，新加坡 1 到 5 年級藉由控制位數，格外細緻地安排整數、分數、小數的階段性運算學習，可看出其注重訓練學生的計算能力；1年級便開始有乘除運算，也特別強調培養學生心算能力，台灣則無特別強調；另外，台灣綱要有使用「直式計算」一詞，新加坡綱要則無。
5. 台灣 2 年級教導九九乘法表，新加坡 2 年級先教導數字為 2、3、4、5、10 欄位的乘法表，3 年級則是完整的十十乘法表。
6. 台灣在 5 年級提及公因數、公倍數，新加坡則是放在 8 年級。
7. 台灣在 6 年級提及質數、合數，新加坡則是在 7 年級提質數，未有合數一詞出現。
8. 新加坡在 7 年級提及「判別有理數和無理數」，台灣則於 10 年級才提到此項。

9. 在比例上，台灣在 6、7 年級提出比、比值、正比、反比，新加坡則螺旋漸進的安排在 5 年級到 7 年級這三年之中。
10. 量與實測上，對於公斤公克等單位台灣使用「重量」一詞，新加坡則使用質量(mass)。
11. 平行四邊形與梯形面積公式台灣擺在 5 年級，新加坡則擺在 7 年級；扇形面積台灣擺在 6 年級，新加坡則擺在 8 年級。
12. 在表面積與體積計算上，新加坡多提一項「球體」。
13. 時間報讀上，新加坡特別教導學生使用 a. m.、p. m.；台灣雖使用中文之上午、下午，不過在此項中亦可以加入 a. m. 和 p. m. 生活中如此常用的簡記符號教學。
14. 新加坡於 7 年級學習求平方、平方根、立方根之符號與計算，台灣則於 8 年級學習平方根，立方根在這 9 年當中未提及。
15. 台灣於 10 年級有列出輾轉相除法，新加坡則無。
16. 對於複數之四則運算，台灣在 10 年級提出，新加坡則在 11 年級。

### 代數（含樣式、關係、函數與坐標圖形）

1. 描繪圖形樣式 (Patterns) 上，新加坡 1 年級開始訓練學生根據形狀、大小、顏色、方位來讓學生描述規則性；台灣則無擺置此一項目。
2. 新加坡特別提到二次、三次、四次多項方程式根與係數的關係，台灣則無。
3. 新加坡提出有理函數，台灣則無。
4. 新加坡於8年級已引入三角學，介紹簡單的三角比，9年級拓展  $\sin$  和  $\cos$  的角度：90度 ~ 180度，並使用 $\sin$ 、 $\cos$ 公式，10、11年級進入三角函數、週期性與兩圖之關係：如  $\sin x$  與  $\sin 2x$ 、反三角函數，逐年教導，讓學生逐步吸收與接受；台灣則於10年級下學期才開始第一次接觸三角，在這一學期中一口氣列出三角函數的基本概念、性質及其應用，對學生來說是一項挑戰。另外，翻閱其8、9年級教科書，此單元主要圍繞於 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 三項，與台灣明顯不同的特點是：新加坡大量例題與練習題不受限於特殊角度  $30^\circ$ 、 $45^\circ$  和  $60^\circ$ ，而是180度內的任意的角度，包含帶有一位小數的角度，從開始接觸便設計讓讓學生透過查表充分體驗任意角度的問題。並進一步延伸至三維立體圖形，觀察現與平面的夾角、給予邊長來找出角度等類似的三角問題。
5. 台灣於7年級提出指數運算，新加坡則到9年級才提出。
6. 新加坡於 11 年級提出使用小角逼近 (small-angle approximations)  

$$\sin x \approx x, \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2, \tan x \approx x$$
，台灣則無。
7. 台灣於10年級提出多項式綜合除法、代數基本定理、勘根定理，新加坡則無。
8. 台灣於10年級提出共軛複根，新加坡則於11年級才提出。
9. 台灣於10年級提出指數與對數互為反函數的意義以公式直接表達，不一定要提反函數這三個字，間接表達出反函數的概念；新加坡則於11年級直接提出反函數一詞，並以圖項說明一對一函數和其反函數之間的關係
10. 在函數與繪圖上，新加坡於10年級提出了解  $y = f(x)$  和  $y = |f(x)|$  之間的關係，使

用平面上的轉換：反射、旋轉、平移、放大、縮減、延伸，與其結合，從圖形精確描述其轉換；台灣則無。11年級詳細提出了解圖和代數方程式之間的關係，並特別熟悉以下形式的繪圖： $y=kx^n$ ， $n$  是正整數、負整數或簡單的有理數  
 $ax+by=c$ ， $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （圓錐曲線的幾何性質知識並不被要求），亦要求描述函數圖形在平移、反射、比例上的變化，敘述方程式圖形的對稱性，曲線上點坐標的描述。台灣在這部分則無提出。

11. 方位辨識上，新加坡於 5 年級教導羅盤上的八個方向，9 年級教導方位 (bearings)；台灣只在 7 年級運用直角坐標系來標定位置。
12. 台灣於10年級開始提出複數與直角坐標，新加坡則於11年級才進入複數，在內容上新加坡特別提到用亞根圖 (Argand diagram) 呈現幾何上的複數。
13. 新加坡於10年級引入二維向量，11年級進入三維向量，探討其相關性質；台灣則於11年級才開始一起引入二維與三維向量。
14. 新加坡於10年級提出軌跡 (locus) 此一項目，內容為 (a) 二維中的點集(i) 從一定點與固定的距離描繪出軌跡 (ii) 從一固定的直線與固定的距離描繪出軌跡 (iii) 描繪出與兩定點等距的軌跡 (b) 與兩相交直線等距的點集；台灣則無此項目。
15. 台灣於12年級有提到柯西不等式與算幾不等式，新加坡則無。
16. 在複數與直角坐標、複數之極式、極坐標與棣美弗定理這些項目上，台灣於10年級提出，新加坡則於11、12年級提出。
17. 新加坡於10年級有一軌跡 (locus) 單元，台灣則無。
18. 新加坡於11年級提出向量外積，台灣則無。

### 圖形與幾何

1. 描述物體的位置關係上，台灣於 1 年級教導學生描述某物在觀察者的前後、左右、上下及兩個物體的遠近位置；新加坡則無。
2. 新加坡在 5 年級有一鋪嵌 (Tessellations) 單元，台灣則無。
3. 新加坡在 6 年級已學習基本展開圖，台灣則在 8 年級才學習。
4. 對於外角一詞，新加坡於 5 年級先說明三角形外角，8 年級說明多邊形外角和；台灣則於 8 年級說明多邊形外角和定理時提及外角一詞。
5. 在「對稱」上，新加坡於 8 年級提及旋轉對稱；台灣則無。
6. 對於立體物，新加坡提及「球體」；台灣則無。
7. 特殊三角形（如正三角形、等腰三角形）新加坡擺於 4 年級；台灣則擺於 8 年級。
8. 平面圖形全等的意義，台灣擺於 4 年級；新加坡則擺於 8 年級。
9. 平面圖形的放大、縮小對長度、角度與面積的影響，台灣擺於 6 年級；新加坡擺於 8 年級，不過新加坡增加了「反射、轉動」的說明。
10. 新加坡於 8 年級的畢氏定理上還有提出其逆定理，台灣則無。
11. 在幾何證明上，台灣於 8 年級提出能辨識一個敘述即其逆敘述間的不同，9年級提出根據平行線截線性質作推理，理解三角型外心、內心和重心；新加坡則無提出。

### 集合與邏輯、排列組合與機率統計

1. 報讀統計圖上，台灣於 4 年級一起提出長條圖、折線圖、圓形圖等；新加坡則依序分散於 4、5、6 年級。
2. 繪製統計圖上，台灣則分散於 5 到 9 年級教導長條圖、折線圖、圓形圖、盒狀圖；新加坡於 7 年級一起教導數字圖表、點圖、長條圖、折線圖、圓形圖、莖葉圖、直方圖。
3. 新加坡於 10 年級使用集合語言與記號，並詳細列出，台灣則於 11 年級安排在機率與統計單元中提出集合簡介，未詳細列出。
4. 台灣於 11 年級提出遞迴關係數列，新加坡則無提出。
5. 在推論統計這部分台灣與新加坡均安排在 12 年級，相當不同的一點是新加坡範圍較廣且內容深入許多，如假設檢定與雙變量資料上。

### 數學分析

1. 台灣於 10 年級提出數列、 $\Sigma$  符號、等差與等比有限和、無窮等比級數極限，新加坡則於 11 年級提出。
2. 新加坡於 11 年級提出極限的概念，台灣則於 12 年級提出函數極限的意義。
3. 新加坡明顯多台灣「微分方程」與「數值方法」這兩大內容，均擺於 12 年級教導，相當於台灣的大一學生程度。
4. 台灣於 12 年級有提出微積分基本定理與定積分之黎曼和估計，新加坡則無。
5. 新加坡於 11 年級有提到使用小角逼近、對一函數做馬克勞林級數展開，使用積分求平均值，使用代換積分法來做簡化與求值，當被積式被視為乘積時，使用部份積分來做積分；台灣則無提到。
6. 新加坡數學分析絕大部分內容安排在 11 年級提出，台灣則於 12 年級，整體來看，其進展較台灣快一年。



### 三、英國

英國的教育長久以來主要由私立機構提供，只有少數而且通常來自中上階層家庭的人，才能進入極為昂貴且篩選極其嚴格的所謂文法學校接受基礎教育，而幾乎也只有這些學校畢業的學生才有機會獲得高等教育。世界各國在二十世紀末分別展開的教育改革，各自因其歷史背景而鐘擺似地向另一個方向靠攏。就英國而言，就是從菁英教育政策向平等教育政策移動，由分散而各自為政的私立教育機構逐漸轉為政府資助與介入越來越深的結構，由獨立自主的課程設計改以實行一套具法律地位的國訂課程標準，並以實施更多而且更精確定義的考試來提昇學生、教師乃至於家長對於教育成效的重視。

一個組織的改變，有內外兩大因素：其內部成員必須自己覺得需要改變，而外部也恰好提供足夠的壓力促其改變。英國工黨的布萊爾在 1997 年的競選口號就是三個大字：Education. Education. Education。他的勝選似乎可以解釋為英國社會內部認為教育有必要改變，而且也感受到外部的壓力促其改變。但是，英國過去的菁英教育成效，至少就目前來看，並不算失敗：英國的經濟與產業，仍然執世界之牛耳；英國社會的自由與民主，公民意識的成熟與進步，仍然受人景仰與模仿。那麼，英國之所以選擇從菁英教育改變到平等教育，究竟是因為想要實踐社會正義的理想，還是真正感到有所需求或者受到威脅而必須改變？這是個耐人尋味的問題，值得台灣的教育學者和執政者探索。

#### (一) 教育改革、證照考試與升學體制

英國這一波的教改並非始於工黨政權，而是從 1980 年代後期就開始檢討了。當時他們也做了國際比較，並曾經讚揚台灣的教育體系。其讚揚的理由是台灣中小學幾乎全是公立學校，因此全國國民有一個低廉的、一致的並且公平的受教育機會。工黨在 1997 年執政以後，的確以較快的步伐發佈了許多法案或者政策白皮書，但是改革畢竟不是革命，新政權也承續了許多傳統的作法或建議。例如著名的狄林報告 (Dearing Report) 是在 1996 年五月受委託展開研究，為期一年而在 1997 年七月完成 [E1]，從這份厚達 1700 頁的報告可以看到工黨執政後的教改藍圖。而實施了將近半個世紀的證照考試制度，也沒有在一夕之間徹底改變，只是逐漸做了調整。

英國政府實踐競選諾言的具體行動之一，就是如今成為布萊爾競爭對手的財政大臣布朗，在 1998 年宣布將在三年間挹注 90 億英鎊（與台幣之幣值比大約是 1:60）投入其教改政策；當天的 BBC News 為此消息撰寫的新聞標題是 *9 Billion for 'Education, Education, Education'* [E2]。他們把錢花在哪些地方呢？舉其大者，為貫徹其 Literacy and Numeracy（文字與數字素養）之教育改革方針，全國中小學在原有課程之外，每天增加一小時的英文課、與一小時數學課（逐年逐區實施）。班級人數從大約 35 人逐年降低到 30 人以下（以大約三年時間完成）。投入幾乎四年的努力，以產學合作的模式建構『全國教育格網』(National Grid for Learning) 不但服務本國的學校教育、全民的終身學習、國家級證照考試的網路化，更放眼國際市場，打算在網路遠距教學的產業中搶得先機。第一批中學（7 年級）數學、英文和法文的網路課程，在 2002 年秋季上線；其中的數學網路課程是由牛津旗下的 3T Productions 公司製作，著名的 BBC 電台也投入了網路教材的製作。培訓全國教師以及圖書館、博物館、美術館服務人員，使其能有效運用現代資訊與通訊科技 (ICT: Information and Communication Technology)；這部分

工作有額外的經費來自於英國樂透的盈餘。

就像所有國家的教改一樣，直接受到衝擊的就是第一線的教師。而英國教師除了面臨國定課程標準和 ICT 技能訓練的質方面壓力之外，也面臨增加英文與數學課時的量方面壓力。國人可能都聽說過，西方社會中的教師，並不像在東方社會那樣受到尊重。英國這一波教改引發了許多教師方面的問題，問題嚴重到 2000 年開學的時候，居然還缺大約四百名校長和九千名教師！應急的措施包括一週上課四天，拜託退休人員臨時返校服務，以及聘僱尚未通過教師資格檢定考試的人士。英國的教師，中小學教師也好、大學講師也好，都長期地上街頭遊行抗議；跟一般的勞工一樣，抗議工作太重、酬勞太低。他們工作有多重？就質而言可能很重，因為 1999 年的調查顯示有 4% 患有憂鬱症，教育部居然還成立了 24 小時服務的心理諮詢專線，在 2000 年平均每天約接到 33 通求助電話（英國教師總數約 45 萬人，其中小學教師約 18 萬人，小學男老師只有約 3 萬人）。就量而言，英國教師在 2001 年稱自己每週要工作 40 小時，而他們要求減為 35 小時。他們酬勞有多低？在幾度調薪之後，2002 年英國中小學教師的平均年薪大約是 25,000 英鎊，這還不算所謂的倫敦加級（補償倫敦地區的高消費水平）；就連實習教師都有每年 6,000 英鎊的津貼。相對參考，當時帝國理工學院（Imperial College）的講師級年薪是 28,319 英鎊，教授級年薪是 42,500 英鎊。

根據 1998—2000 年的中學人數調查，我們假設英國的一屆學生人數是 64 萬。1998 年參與『中等教育普通證書』（GCSE: General Certificate of Secondary Education）考試的人數是 67 萬人。GCSE 是中五（11 年級）義務教育結束後，應該要考的證照。多出大約 3 萬人可以解釋為重考或者提早參加考試的人數。GCSE 的考試結果以 A, B, C, D, F, G 評等第，一般而言要在 C 以上才有機會接受學術性質之後期中等教育，也就是通常為期兩年的大學預科教育，又稱為中六。英國教育部（DfES: Department for Education and Skills）還出版一本免費贈送的小冊子 [E3]，教導那些成績預測在 C/D 邊緣的學生，和他們的教師與家長，怎樣改進應考的技巧，以提高成績到 C 等第。GCSE 的不及格（連 G 等第都不給）率大約是 3%。

英國的國定標準課程就涵蓋到中五為止（1—11 年級），其後的職業教育或大學預科教育，基本上以通過各種證照考試為學習目標。以升大學而言就是要參加『普通教育證書』（GCE: General Certificate of Education）考試。GCE 考試有兩個層級：AS (Advanced Subsidiary) Level 和 A (Advanced) Level。AS Level 通常需要一年的修業內容，而 A Level 需要兩年。所以一個 AS Level 科目的考試通過，可以視為半個 A Level 科目的執照。GCE 考試的科目很少，而且不需要全考，一個人只要通過兩個 A Level 科目就可以申請進入某些大學的某些學系，這也就是專業分流的意思了。AS Level 是最近這波教改的新產品，原意是降低單一科目的壓力（就好像一門一學年的課程要求，可以換成兩門一學期的課程來抵一樣），並鼓勵學生多學些不同的科目。但是學生發現考兩個 AS Level 來換一個 A Level 其實不見得輕鬆，而大學的學系也不太買帳，所以目前的接受度並不如預期。所以簡單來說，想要升大學的人，一般還是花兩年的時間學習 2—5 科 A Level 課程，而後參加 GCE 考試，期望獲得足夠的 A Level 證書，然後申請大學。而英國的學生進大學的時候，就相當於我國的大二學生了，他們已經在預科階段大致決定了專業走

向，在大學的修業年限通常是三年。

A Level 在英國長期以來被視為金字招牌的學術性質證照。在大學以外，許多企業行號也重視 A Level 證書。同樣也是這波教改的新產品，將高級職業證書 (GNVQ Advanced: General National Vocational Qualifications, Advanced) 改名為職業 A Level (Vocational A Level) 證書。但是從英國的報紙和學術文章做側面觀察，不少人抱著嘲諷的態度看待這種改面子不改裡子的作法。

1998 年參加 GCSE 考試的那一屆，到了 2000 年只有約 42 萬人申請大學。假設 A Level 考試的不及格率是 5%，我們於是假設有 68% 的學生在義務教育之後選擇了兩年的大學預科課程。而當年的大學錄取率只有 55%，其中還剩下 2000 多個招生未滿的名額。這樣折算，英國的同屆國民當中，大約只有 34% 進入大學 [E4]。

## (二) 國定課程之結構

如前述，英國的國定課程只涵蓋 11 年義務教育階段，包括小學六年與中學五年，其結束時間相當於我國高二。但是英國的一般入學年齡是 5 歲，因此完成中五結束時的年齡可能相當於我國的高中一年級。

在時程上，11 年的國民義務教育分成四個階段 (Key Stages)；1, 2 年級是第一階段 (Key Stage 1)，3, 4, 5, 6 年級是第二階段，7, 8, 9 年級是第三階段，10, 11 年級是第四階段。在科目上，國定課程將學科粗分為核心科目 (Core Subjects) 和基礎科目 (Foundation Subjects) 兩大類，其中核心科目有四：英文，數學，自然科學，資訊與通訊科技 (ICT)，基礎科目有八：歷史，地理，音樂，體育，公民，現代外語 (MFL: Modern Foreign Language)，設計與科技 (Design and Technology)，藝術與設計 (Art and Design)。其中現代外語和公民從第三階段才開始授課，而公民課程是 2002 年才首度列為國定課程。至於歷史、地理、音樂和藝術與設計，則只在前三階段教授。

我們在 12 門科目當中兩度看到設計，或許可以推論英國人認為這是未來社會需要的人才。在其國定數學課程的幾何主題中，可以明確看到呼應此一人才培育目標的教學項目。誠然，在電腦輔助設計軟體的快速進步，促使生產模式逐漸變得講究創意和滿足個體要求。在此脈絡中，或許就能明白何以英國的基礎教育會把設計，以及所需的幾何操作能力與認知概念，放在國定課程之中。

英國國定課程只規定了各科目分配課時的百分比下界，並未明確規定時數。例如第四階段規定數學至少需佔 12%，英語也是至少 12%，而自然科學是至少 13%；而學校擁有 43% 的彈性時數來自主性地安排提高哪些課程的時數。本報告並未詳細搜尋中小學的課表來調查課時，但是我們知道，從 1999 學年起，各小學每天要「增加」一小時的數學時間 (numeracy hour)。所以英國第一、第二階段的數學課時比例，應該類似美國加州與新加坡，可以達到 20% 的水準。

在國定課程標準裡面，每個科目都自訂其教學主題，並針對每個主題列出 8 級 (Level 1—Level 8) 的能力描述。為了容許學童超出預期能力指標的可能，其實還有一個『破表』等級 (Exceptional Performance)，所以可以視為一共有九個等級。這九個等級貫穿 11 年國教，不論學生屬於哪個階段，都用這些等級來評量其能力。例如小學畢業生的能力，希望在各學科的各主題上都達到 Level 4，比較好的學生應該達到 Level 5。工黨

政府認為自己執行教改有功的指標之一，就是在第二階段結束時，1998年只有62%學生的數學（三個主題合計）能力達到Level 4，而四年後的2002年則提昇到71%。教育部長說他的最終目標是有80%的小學畢業生（亦即第二階段結束）達到Level 4的數學能力。這或許是英國版的『數學教育能讓80%學生學會』教育理想吧，注意他們是在不妥協評量標準的前提下，提高通過評量的比例。在那71%具備Level 4數學能力的學生當中，30%也通過了更高等級Level 5的評量。換句話說，2002年小學畢業生當中，有大約21%達到較高的Level 5。英國政府希望將來能有80%小學畢業的數學能力達到Level 4，30%達到Level 5。我們將在下一小節，舉出幾個數學能力等級的例子。

英國的學生在每一階段結束時都要參加能力評量。第一階段結束時才七歲，所以是在學期當中（通常是春季）在學校內舉行評量，總共要考三小時。第二和第三階段結束時的考試，形式上就像國家級會考了。考試的總時數，在第二階段大約是5小時，第三階段大約8小時。至於第四階段結束時，就應參加GCSE考試，或者其他職業類型的考試，前面已經介紹過。GCSE顯然是個大型國家考試了，分成10科，每科考兩場，但「設計與科技」考三場，每場大約三小時。考試的10個科目來自於國定課程的12個科目，但是音樂、體育、公民、藝術與設計不考，ICT也沒有自己的考試而是融入其他科目當中。而英文分成英語和文學兩科，現代外語則分成德語、法語和西班牙語，顯然應是讓學生選考。整個考試的時程每年根據日曆安排在非例假日，並不放在固定的日期。以2004年為例，從5月24日星期一的第一場，考到6月23日星期三的最後一場[E3]。

至於達不到預定的最低能力等級，要怎麼辦？本報告尚未詳細查明。根據文獻做側面觀察，第一和第二階段的評量結果會讓家長及教師知道，作為教學上需要補強或改進的參考。就我們對英國的瞭解，他們並不會排斥分科能力編班，將特定科目學習較慢的學生編在一班，或是將對於某個科目性向較強的學生編在一班，讓他們以不同的教材和不同的進度來學習（看後面能力等級的說明）。我們知道與英國教育相當類似的新加坡和紐西蘭都這樣做，所以不應假設英國不這樣做。

第三階段的評量結果就會明確地影響其第四階段的學習。就數學課程而言，前三個階段的課程標準只有一種版本，但是在第四階段分成兩種版本：Foundation和Higher。國定標準要求第三階段結束時（9年級）的數學能力至少達到Level 5（大約20%的學生在6年級就達到了），而較好的學生達到Level 6。如果9年級結束時的評量還不到Level 5，則到了第四階段（10, 11年級）就要根據Foundation課程標準來授課；其他學生則按照Higher課程標準來授課。考察這兩種版本，不難發現Foundation版本基本上就是第三階段的學習材料再來一遍，甚至在代數方面還比第三階段稍微簡單一點，而舉例的時候也更實際一點。例如在第三階段舉例『公式』時說了「密度=質量÷體積」，到了第四階段，相對學習項目所舉的例子卻變成「薪資=工時×時薪」。

由此可以這樣說：英國教育從10年級起準備分流，而在11年級考完GCSE之後正式分流。相對地，新加坡的教育制度讓學生從5年級起分級，9年級起準備分流，而人數大約佔50%的特別或快捷課程學生，在中四（10年級）就準備好參加GCSE考試，然後正式分流；比英國一般的國民早一年。

### （三）數學課程標準之教學主題與能力等級

英國的國家課程標準是由主管課程、評量與核發證書的資格暨課程局 (QCA: Qualification and Curriculum Authority) 負責設計。QCA 之下設有數學課程委員會 (QCA Mathematics Team)，至少在最近幾年看來是一個常設委員會，因為他們每季 (term) 都會公告一些背景或進度說明，而每年公布一份調查報告。除了主動研究調查以外，他們也接受民眾投書式的意見 [E5]。例如 2003 學年的春季報告就講了他們設定的議題是 *dyscalculia* 亦即先天的算術殘障：英國認為有 4% 學童患有 dyslexia (reading disability)，而此委員會研究認為這些閱讀殘障的學童之中，有 40% 也是算術殘障。

本報告採用的英國數學課程版本是 1999 年由教育部和 QCA 共同出版的《數學課程標準》[E6]，以下簡稱《標準》。這份《標準》將需要教導的數學『知識、技能與理解』(knowledge, skills and understanding) 分成以下四個教學主題 (Attainment Target)：

Ma1: 數學之運用 (using and applying mathematics)

Ma2: 數與代數 (number and algebra)

Ma3: 形體、空間與測量 (shape, space and measures)

Ma4: 資料處理 (handling data)

其中 Ma1 類似我國所說的連結或解題，屬於能力或意識，而非數學本身，所以在綱要中並沒有分階段詳述其教學內容。每一個主題，包括 Ma1，都有一段文字簡明扼要地描述從低到高 8 種程度的能力等級，以及一段對於該主題有『超凡』能力的描述。其用意已經在前一節介紹過了。

所以《標準》大體上可以分成兩部分，一部份描述各教學主題所應該教導的數學內容，另一部份描述評定學生能力等級的依據。所以英國的《標準》把「該教什麼」和「學到多少」分開來處理。這或許地反應了英國人務實的處事態度。因為《標準》是有法律效力的，教師和學校需負起教導的法律責任 (statutory duty)。為了讓這個法律能夠執行，必須把「該教什麼」定義清楚。如果教師或學校被證明沒有按照《標準》教導學生，而這是一個比較能夠客觀判定的事實，那就違反了法律。只要教師教導了，學生能學到什麼程度，就不是教師的法律責任了。當然政府還是會透過每個階段結束時的會考結果，以掌管學校人事與預算的手段，來盡量提高教學的成效。但是那畢竟是執行的品質，不是法律責任的問題了。所以《標準》中對於教學內容的規定，總是這樣開頭的：『學生須被教導…』(Pupils should be taught to …)。因為這一層法律上的顧慮，《標準》並不能寫得太過具體，就連舉例的時候都寫在中刮號裡面；所有寫在中刮號裡的文字都不具法律效力。

在教學主題那個部分，第一階段只有 Ma2「數」的部份，以及 Ma3。第二階段開始，增加了 Ma4。第三階段開始，開始了 Ma2「代數」的部分。教學主題以四個階段分章，第四階段有 Foundation 和 Higher 兩章，請看前一節的解釋。在每一個階段裡面，分成『知識、技能與理解』和『實施建議』(Breadth of Study) 兩節，前者依主題規定該要教的內容，後者通常只條列了八、九個提醒或建議的事項。

我們將在下一節介紹『知識、技能與理解』的數學內容，此處舉一個例子，看看所謂的『實施建議』是什麼意思。在第三階段，共列出八條建議，其中第八條針對資訊工具或計算器做說明：

在這個階段，數學之教導應該透過適當的課題，讓學生能夠使用恰當資訊工具 [例如試算、表資料庫、幾何或測繪製圖套裝軟體]，能夠正確並且有效地使用計算器，也能夠辨別在什麼情況下不適合使用什麼科技工具。

During the key stage, pupils should be taught the Knowledge, skills and understanding through tasks focused on using appropriate ICT [for example, spreadsheets, database, geometry or graphic packages], using calculators correctly and efficiently, and knowing when it is not appropriate to use a particular form of technology.

英國的《標準》在結構上有一個特色是其他受比較國家中沒有看到的：跨學科的交叉索引。《標準》的排版格式乃是將正文安排在靠內側三分之二的版面上，在靠外側的三分之一空白處寫上註解 (Notes) 和外部指標 (Links)。其中註解通常是關於教學內容的闡述，指明此一項目與未來學習的關係。例如講相似三角形的對應兩邊比值不變的時候，註解中說明這個觀念是未來學習三角函數的前置經驗。

在某些教學要求項目旁邊，用指標提示此項目需倚賴於同一階段另一科目的某項教學要求。就數學科而言，我們只看到對於英文和 ICT 這兩科的倚賴，這種倚賴至為合理。例如第三階段 Ma4 有一款要求是「學生須被教導去解釋、討論並綜合不同形式呈現的資訊」(KS3 Ma4/1e)，此項目倚賴於同階段英文科 En1/3b 和 En2/1a 那兩款教學要求。其中 En1 是 Speaking and listening 教學主題，En2 是 Reading 教學主題。En1/3b 是參與小組討論的教導項目：*pupils should be taught to take different views into account and modify their own views in the light of what others say*。而 En2/1a 是瞭解文字敘述的教導項目：*pupils should be taught to extract meaning beyond the literal, explaining how the choice of language and style affects implied and explicit meanings*。而 Ma4/1f 要求教導學生「利用圖表和配合的說明文字，以數學形式溝通」，這一項倚賴於 ICT 科目中「能以簡報軟體 (presentation software) 呈現資料並表達他們的發現」的要求 [E7]。

本報告沒有全面調查數學科如何被其他科目倚賴，但是在《科學課程標準》中時時可以發現倚賴於數學或 ICT 的教導項目。這也是毫不令人意外的現象。

在能力等級那個部分，《標準》簡要地分別針對四個教學主題 Ma1, Ma2, Ma3 和 Ma4 寫出 8 種程度的能力等級描述，和『超凡』能力的描述。英國期望多數 (majority) 學童在

第一階段結束時 (2 年級、7 歲) 達到等級 2

第二階段結束時 (6 年級、11 歲) 達到等級 4

第三階段結束時 (9 年級、14 歲) 達到等級 5/6

第四階段結束時 (11 年級、16 歲) 報考 GCSE

工黨政府宣稱其所謂的「多數」目標為 80%。第三階段結束時，英國已經接受學生將有能力差距，因此期望達成的能力等級不是單一的，而是 5 或 6。在第三階段的那三年當中，

英國政府認為「大多數」(great majority) 學童的能力介於 3—7 範圍內。此差距甚大，還包括不到小學畢業能力等級的學生。此一現象呼應前面說明英國應有分科能力編班措施的看法。

描述等級的文字言簡意賅，值得我們參考，所以將全文放在本報告的附錄三中。純粹為了讓讀者對於能力等級的要求程度和書寫方式，在此挑選 Ma4 資料處理做全文翻譯：

### Level 1

學童挑出物件並予以分類，說明他們採用的判斷標準。

### Level 2

學童根據不只一項的判斷標準來挑選並分類物件。在蒐集了資訊之後，他們將結果記錄成簡單的條列、表格或方塊圖，用以傳達他們的發現。

### Level 3

學童從簡單的條列或表格中的獲得並解讀資訊。他們能繪製長條圖之類的統計圖表來傳達蒐集到的資訊，而圖表上的符號代表某種單位。他們也可以解讀以這種形式呈現的資訊。

### Level 4

學童蒐集離散資料並以表格紀錄其發生次數。他們瞭解並用眾數和範圍來描述資料集合。對於適當的資料，他們能以等組距歸類資料，並依此繪製次數圖表，也會解讀這種圖表。他們能繪製並解釋簡單的折線圖。

### Level 5

學童瞭解並使用離散資料的平均數。能用資料的全距和眾數、中位數或平均數之一，來比較兩個簡單的分佈。能解讀包括圓餅圖（圓形比例圖）在內的統計圖表，並獲致結論。能瞭解並使用介於 0 與 1 之間的機率。學童能在適當情境下挑選以機率均等為基礎的方法，提出一個實驗結果的機率，並驗證其合理性和逼近其數值。他們瞭解重複實驗可能得到不同的結果。

### Level 6

學童蒐集並記錄連續資料，在合理範圍內選擇恰當的組距來製作次數分配表。能繪製並解讀次數分配圖表。能繪製圓餅圖。學童從散佈圖中獲取結論，並對相關性有基本瞭解。當面對兩個實驗的組合時，學童能以繪圖、製表或其他形式指出所有可能的結果。他們會運用互斥結果的發生機率總和為 1 的知識來解決問題。

### Level 7

學童能提出假設，並在考慮到變異與偏差的情況下設計適當的方法來驗證其假設。從以群組方式呈現的資料中找出最多數的一組，估計這些資料的平均數、中位數和全距，並針對問題挑選最恰當的統計量。利用全距、平均數以及次數分配折線圖，比較不同的分佈並做推論。根據目測，在散佈圖上畫一條迴歸直線。學童瞭解相對發生頻率是機率的一種估計，並與實驗的結果比較。

### Level 8

學童能利用組距上限來繪製和解讀累積次數表格與統計圖。能估計中位數與四分位數，用來比較不同的分佈並做推論。知道如何計算結合事件的機率，用來解決問題。

## Exceptional performance

學童能繪製並解釋直方圖。瞭解不同的取樣方法和樣本量，可能影響結論的可靠性。知道如何針對樣本空間的特性選擇並驗證適當的抽樣方法。可以辨認出獨立事件，並且知道這種情況下的機率算法。

### (四)數學課程之教學標準

相當於我國高三和大一的英國大學預科教育，是以應考 GCE A-level 或 AS-level 考試為目標。而新加坡也讓學生參與同一考試。因此 A-level 考試規定的數學科大綱應該就相當於新加坡的 9233 和 9234 兩份數學綱要。而 AS-level 是 A-level 的一半，所以就大致對應新加坡的 9233 綱要。因此，我們不再重複討論這個階段的英國數學教育，請參考本報告在新加坡方面的調查。

大體而言，英國《數學課程標準》在第四階段的規定，不論是 Foundation 還是 Higher，都顯得進度緩慢而有相當多與第三階段重疊之處。這種寫法，可能是顧慮到作為有法律效用的國定「標準」應該照顧大多數國民，因此將標準訂得比較籠統，由教師或學校視學生的需求或生涯規劃，在合於標準的前提下提供不同深度的數學教育。因此，需要研讀其教科書，或者考察其 GCSE 考題，才能一窺第四階段的實況。不論如何，我們認為英國在第四階段的教學規劃比前三個階段來得沒有效率，並不值得我們學習。由此可已解釋，何以新加坡會設計一套特別／快捷課程，讓大約一半的學生以 10 年時間學完英國 11 年的基礎教育。

為了行文方便，以下我們分別以 KS1, KS2, KS3 和 KS4 代表英國義務教育的第一、第二、第三、和第四階段。

雖然那並非英國全國的義務教育，但是大部分地區的兒童實際上受過學前教育。這種情況與我國類似。因此，《標準》在 KS1 開頭處聲明，假設學童入學前已經具備一些知識，包括認得 1 到 9 這些數目字，能點數到 10，以日常用語指稱簡單物體的外型和相對位置（例如上下左右前後）。這些知識或能力，都正式寫在我國小一數學綱要內，通常在第一冊數學課本裡面教導。

英國《標準》對心算能力 (mental calculation) 著墨甚多，細緻地要求教師要教導學生記憶 (recall) 或熟練許多基本的算術事實，以便迅速心算。包括：

KS1: 記憶 10 以內的加法表，然後熟練地湊 20。記憶 10 以內的兩倍 (乘二)，20 以內的一半 (除二)。熟練個位數加上任意十的倍數 (例如 70)，然後兩位數加上任意十的倍數。熟練地運用加法交換律與加減互逆原理來做算術 (並沒有講這兩個規律的名字)。

KS2: 記憶 20 以內的加法表和減法表，然後熟練地湊 100。熟練二位數加減法 (不做負數答案者)。熟練處理接近整百或整千的加減法計算 (例如  $3280-1997$  和  $4560+998$ )。記憶十乘乘法表做乘法，用它來記憶 2 到 10 的平方數。記憶 100 以內的兩倍和一半。熟練地運用分配律與因數分解做 100 以內的乘除計算。熟練任一個二位數的質因數分解。

KS3: 記憶 100 以內的加法表。記憶 2, 3, 4, 5 和 10 的立方數。記憶十乘乘法表做除法。記憶常用單位分數的對應小數 (例如先是  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/10$ ,  $1/100$ )



然後是  $1/3$ ,  $2/3$ ,  $1/8$ )。熟練地將小數四捨五入到整數位，然後到某個規定的有效位數。熟練地估計平方根到最近整數 (例如 85 的平方根)，能心算兩位整數與兩位小數的加減法 (例如  $13.76-5.21$ )，能心算兩位整數與一位小數乘除以一一位數 (例如  $14.3 \times 4$  和  $56.7 \div 7$ )。

KS4: 記憶從 2 到 15 的平方數和反運算 (例如 144 的平方根是 12)，記憶 2, 3, 4, 5 和 10 的立方數和反運算。熟練地在一般小數形式和標準形式 (科學命數) 之間做轉換，並熟練地四捨五入到指定的有效位數。

熟練的基本心算能力 (絕不過份要求)，幾乎是所有數學學習的共同基礎。關係特別密切的，是筆算 (written calculation) 能力、估算能力 (mental estimates) 和數值樣式 (number pattern) 辨識能力；估算又與計算器融入數學課程密切相關，樣式則是學習數量關係與函數概念的前置經驗。所以，算術、代數和資訊工具，就是透過心算相互結合的。

英國的數學課程標準，對於計算器的使用規範，說明得比其他國家詳細，而作法也顯得更激進些。英國將計算 (calculation) 分成三種技能：心算、筆算和器算 (用 calculator 做計算)。《標準》中的心算和筆算部分都完全不提除數為小數或分數的除法計算。除數是分數的情況，只出現在係數為分數的線性方程式裡面，而在此情況不需要採用除法形式求解，可以用等量公理以乘法求解，所以在算術上，就只有分數乘法了。分數之加、減、乘計算，放在筆算裡面。而小數之加、減有心算、筆算和器算的要求；至於小數之乘、除法，除了乘以或除以 10 的整數次方 (例如乘以 0.01 或除以 0.1) 需要會心算以外，稍微複雜一點就訴諸於計算器。而英國的課程設計中，就是以基本計算之心算能力，作為大量使用計算器的平衡力量。

關於計算器，《標準》還規範了幾種能力：

- 學童需要能夠辨識什麼時候適合使用計算器，什麼時候不適合。而一旦適合使用，就要能有效地操作。
- 學童必須能夠估算 (這時候需要心算能力和做估算的技巧) 計算器所得的答案是否合理。
- 學童必須能夠針對問題自行判斷，應該取器算輸出的幾位有效數字作為答案。

我們認為英國的這些關於計算器的考慮甚為務實而合理，值得參考。

英國在課程中使用 ICT 並不僅限於計算器，而計算器也不僅限於用來代替紙筆做四則運算。舉凡平方根、立方根、圓周率、三角比、指數與對數計算，英國都很快地教導學生使用計算器來解題和——更重要地——做實驗。而 ICT 的使用就更有趣了。《標準》中提到了常見的簡報軟體、試算表、平面幾何和坐標測繪 (plot) 套裝軟體，甚至提到資料庫。《標準》只提其這些軟體的功能名稱，而沒有指定產品名稱。相對地，我們在台灣的資訊教育類說明或教科書中，每每看到作者或編者寫的是產品名稱 (例如 Excel) 而不是功能名稱 (例如試算表)。這五種軟體，都倚賴於 ICT 科目的支援。前四種軟體在數學課堂中的用處至為明顯，比較不尋常的是，英國教師利用函式圖形的局部放大 (zoom in) 來做較複雜求解過程的逼近 (看下面 KS4)。資料庫是在 Ma4 資料處理中提及，用來存取學習統計時所需的資料。《標準》只說教師要使用這些 ICT 來教學，並教導學生使用。卻

沒說學生要學到什麼程度，也沒說他們放學後是否還要操作這些軟體。

從數值樣式到數列 (sequence)，再到函數，是貫穿《標準》之所有階段的另一個主軸。各階段的教學要求，大致包括：

KS1: 建立和描述數值樣式 (這時候指的是 100 以內的正整數)，包含加法和減法關係的樣式，以及 2 的倍數、5 的倍數、和 10 的倍數的樣式。教導學生使用樣式來做預測。認得出來包含奇數和偶數在內的整數數列，認得出來用兩倍和一半關係形成的數列 (需要心算能力的配合)。

KS2: 能以語文說明某些數值樣式的一般性質，並據以推論。能辨認 20 以內的質數數列。

KS3: 能辨認和寫出像 2 的次方和  $1, 1+2, 1+2+3, \dots$  這種常見的整數數列。根據文字描述寫出一個數列的前幾項，寫出它的一般項 (nth term) 公式或者以語文描述之。根據給定的一般項公式或者遞迴公式，寫出數列的前幾項。寫出一個算術數列的一般項公式，並能驗證其正確性。先以語文描述簡單的對應關係，然後將它以符號的形式寫出來。然後就接上函數了，包括線形函數的顯式和隱式 (例如  $x+y=7$ ) 及直線的點斜式，並能根據給定的線形函數寫出斜率與截距。以及簡單的二次 (例如  $y=x^2$  和  $y=3x^2+4$ ) 和極簡單的三次 (例如  $y=x^3$ ) 多項式函數的對應圖形。

KS4: 不再提樣式，在數列方面重複了 KS3 的要求，教學上可能是複習，也可能更深或更複雜一點。在函數方面，要教導平行線與垂直線的斜率關係，並以線形函數建立實際問題的模型，解讀函數圖形對應實際問題的意義。提高二次函數的複雜度到一般形式。從二次函數的圖形估計它的根，也從函數圖形估計一次和二次方程式的交點。然後就要教導簡單的有理函數 (分母為一次式) 和指數函數 (底數取簡單整數或分數) 了，再來要在圓周上，而非直接在直角三角形上，教導三角函數。在此直接引進計算器和測繪軟體輔助學習，並讓學生認得這些函數的圖形。教導四種基本的合成函數形式 (亦即  $y=f(x)+a$ ,  $y=f(ax)$ ,  $y=f(x+a)$ ,  $y=a*f(x)$ )，並以一次、二次、正弦和餘弦為例，認得它們的圖形變化。講圓方程式，並在圖形上求圓與直線交點之近似解。

溝通、推理和解題能力，也是英國人想要藉數學教育而培養的國民基本能力。其中的「溝通」並不只是聽與說之技巧或態度，而是正確使用數學詞彙與符號，精確使用數學語言 (包括統計數據) 的溝通。這部分的能力顯示於階段評量或 GCSE 考試當中 (不全是選擇題)，是評分項目之一。GCSE 文件中特別舉了對頂角和內錯角為例，學生需能正確使用這些名詞來表達其思維。

## 四、中國大陸

### (一)教育目標

中小學階段的數學教育目標，是在通過義務教育階段的數學學習之後，學生能夠

1. 獲得適應未來社會生活和進一步發展所必需的重要數學知識（包括數學事實、數學活動經驗）以及基本的數學思想方法和必要的應用技能；
2. 初步學會運用數學的思維方式去觀察、分析現實社會，去解決日常生活和其他學科學習中的問題，增強應用數學的意識；
3. 體會數學與自然及人類社會的密切聯繫，瞭解數學的價值，增進對數學的理解和學好數學的信心；
4. 具有初步的創新精神和實踐能力，在情感態度和一般能力方面都能得到充分發展。

高中數學課程的總目標，是在 9 年義務教育數學課程的基礎上，使學生獲得作為未來公民所必要的數學素養，以滿足個人發展與社會進步的需要。具體目標如下：

1. 獲得必要的數學基礎知識和基本技能理解基本的數學概念、數學結論的本質，瞭解它們產生的背景、應用和在後繼學習中的作用，體會其中的數學思想和方法；
2. 提高空間想像、抽象概括、推理論證、運算求解、資料處理等基本能力；
3. 在以上基本能力基礎上，初步形成數學地提出、分析和解決問題的能力，數學表達和交流的能力，逐步地發展獨立獲取數學知識的能力；
4. 發展數學應用意識和創新意識力求對現實世界中蘊涵的一些數學模式做出思考和判斷；
5. 提高學習數學的興趣，樹立學好數學的信心，形成鍥而不捨的鑽研精神和科學態度；
6. 具有一定的數學視野，初步認識數學的應用價值、科學價值和文化價值，逐步形成批判性的思維習慣，崇尚數學的理性精神，從而進一步樹立辯證唯物主義世界觀。

### (二)學制

中國大陸現行的義務教育學制有多種模式，其中主要有二種：「五四學制」、「六三學制」，而部分省市還存在「五三學制」。在經濟比較發達、教育基礎比較好的上海，在 1988 年以前實行的是小學 6 年、初中 3 年的「六三學制」。從 1988 年開始，小學六年級挪到初中，設立「初中預備班」。從 2004 年 9 月新學期開始，上海市九年義務教育階段全面實行「五四學制」，即小學 5 年，初中 4 年。初中四個年級分別為六年級、七年級、八年級與九年級。因此 2004 年後，「初中預備班」被正名為六年級。實行「五四學制」後，小學生修滿五年，學科考試成績合格發給小學畢業證書；初中生修滿四年，學科考試成績合格發給初中畢業證書。

而根據上海市教科院專家指出，實行「五四學制」的最大好處是有利於減輕學生初中階段過重的學習負擔和心理壓力。在「六三學制」下，初中三年太短，學生剛從小學畢業，第一年基本處於對初中教育方法和環境的適應期；一到初三，又將面臨畢業和升學，中間只有初二一年過渡。所以學生一旦跟不上，往往來不及調整，造成持續學習的困難 [J1]。

### (三)課時安排

在九年義務教育階段的課時分配方面，屬於地方政府的管轄範圍。我們參考了天津市規定的課程安排 [J2]。小學每節課教學時間為 40 分鐘，初中每節課教學時間為 45 分鐘。表中帶括弧的課時安排適於將六年級放在初中的區縣、學校使用。

週 課 時 程	年 級	一	二	三	四	五	六	七	八	九	合 計	
學 科 課 程	思想 品德	1	1	1	1	1					404	
	思想 政治						1	2	2	2		
	語 文	10	10	8	7	6	6	5	5	5	2098	
	數 學	5	6	6	5	5	6	4	4	5	1554	
	外 語			3	3	3	4	4	4	4	842	
	社 會			2	2	1					612 (578)	
	歷 史						3(2)	2	2			
	地 理						0(3)	3	3(0)			
	自 然	1	1	1	2	2					766 (770)	
	物 理								3	4		
	化 學								0(2)	4(2)		
	生 物							3	2			
	體 育 與 健 康	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	608
	音 樂	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	474
	美 術	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	474
	勞 動			1	1	1	1					236
	勞 動 技 術								1	1	1	
	資 訊 技 術						2		2			136
機	2	2		1	1	3(1)			0(1)	1(3)	338(368)	

	動										
地方課程	語文實踐	隔週安排一節課，在“語文”教學時間中調劑									
	數學創造	隔週安排一節課，在“數學”教學時間中調劑									
	科技普及	每週安排一節課，在“科技文體”活動時間中調劑									
	文藝欣賞	與音樂教學緊密結合，其課時在音樂課中調劑使用									
活動類課程	晨會（夕會）	每 天 10 分 鐘									
	班團隊活動	1	1	1	1	1	1	1	1	1	304
	科技文體	2	2	2	2	2	2	2	2	2	608
	週課時總量	28	29	31	31	31	31	33	33	33	9454

中國大陸的高中課程已經完全以學分制設計。普通高中學制為三年，每學年 40 週。每學年分為兩個學期，每個學期分為兩個學段，每個學段 10 週，其中 9 週授課，1 週復習考試。每週安排的課程修習時間不得超過 35 節課；每節課教學時間為 45 分鐘。課程以模組為單位，每個模組通常為 36 節課，相當於 2 學分。為減少並學科目，各學校根據實際情況，可以每週安排 4 節課，在 1 個學段內完成一個模組的教學任務；也可以根據教學的實際需要，每週安排 2 節課，在 2 個學段內完成一個模組教學的任務。學生畢業的學分要求：學生每學年在每個學習領域都必須獲得一定學分，三年中獲得 116 個必修學分（包括研究性學習活動 15 學分，社區服務 2 學分，社會實踐 6 學分），在選修 II 中至少獲得 6 學分，總學分達到 144 方可畢業。

在學科分配方面，下表為中國大陸教育部《普通高中課程方案（實驗）》和語文等十五個學科課程標準（實驗）[J3]。

學習領域	科目	必修學分 (共計 116 學分)	選修學分 I	選修學分 II
語言與文學	語文	10	根據社會對人才多樣化的需求，適應學生不同潛能和發展的需要，在共同必修的基礎上，各科	學校根據當地社會、經濟、科技、文化發展的需要和學生的興趣，開設若干選修模組，供學生選擇。
	外語	10		
數學	數學	10		
人文與社會	思想政治	8		

	歷史	6	課程標準分類、分層次設置若干選修模組，供學生選擇。
	地理	6	
科學	物理	6	
	化學	6	
	生物	6	
	技術（含資訊技術和通用技術）	8	
技術	藝術或音樂、美術	6	
藝術	體育與健康	11	
體育與健康	研究性學習活動	15	
綜合實踐活動	社區服務	2	
	社會實踐	6	

#### (四)高中數學科選修制

專門針對數學來看，中國大陸把高中數學分成六大系列（A、B、C、…、F），其中A系列（A1、A2、…、A5）為必修，B系列（B1、B2）、C系列（C1、C2、C3）、D系列（D1、D2、D3、D4）、E系列（E1、E2、E3、E4）和F系列（F1、F2、…、F10）為選修。

必修	A 系列	A1	集合、函數概念與基本初等函數 I（指數函數、對數函數、冪函數）
		A2	空間幾何初步、解析幾何初步
		A3	演算法初步、統計、概率
		A4	基本初等函數 II（三角函數）、解三角形、數列
		A5	平面向量、三角恒等變換、不等式
選修	B 系列	B1	常用邏輯用語、圓錐曲線與方程、導數及其應用
		B2	統計案例、推理與證明、數系擴充與複數的引入、框圖
	C 系列	C1	常用邏輯用語、圓錐曲線與方程、空間向量與立體幾何

		C2	導數及其應用、數系的擴充與複數的引入
		C3	計數原理、統計、概率
	D 系列	D1	數學史選講
		D2	現實社會中的數學
		D3	中學數學思想方法
		D4	數學問題集錦
	E 系列	E1	優選法與實驗設計
		E2	統籌法與圖論
		E3	風險與決策
		E4	數位電路設計與代數運算
F 系列	F1	幾何證明	
	F2	不等式	
	F3	參數方程與極坐標	
	F4	矩陣與變換	
	F5	數列與差分	
	F6	尺規作圖與數域擴充	
	F7	歐拉公式與閉曲面分類	
	F8	初等數論初步	
	F9	對稱變換與群	
	F10	球面幾何與非歐幾何	

B 系列課程是為那些希望在人文、社會科學等方面發展的學生而設置的，C 系列課程則是為那些希望在理工、經濟等方面發展的學生設置的。B，C 系列是選修課中的基礎性內容。D 系列課程是數學文化系列課程。E，F 系列課程是為對數學有興趣和希望進一步提高數學素養的學生設計的。A 系列、B 系列與 C 系列裡的任何一個課程為 2 學分（36 節課），其它為 1 學分（18 節課）。

學生的志向與自身條件不同，不同高中、不同專業對學生數學方面的要求也不同，甚至同一專業對學生數學方面的要求也不一定相同。據此，學生可以選擇不同的課程組合。基本建議如下：

- ◆ 學生完成 10 學分的必修課，即可達到高中畢業的最低數學要求。
- ◆ 學生完成 10 學分的必修課，在選修課程 B1 或 C1 中任選 1 個，即可達到高職、藝術、體育類的高等院校的數學要求。
- ◆ 學生完成 10 學分的必修課，在選修課程中選修 B1 與 B2，獲得 4 學分，在 D 系列課程中獲得 2 學分，總共取得 16 個學分，即可達到人文社會科學類高等院校的數學要求。
- ◆ 對數學有興趣、並希望獲得較高數學素養的學生，在完成必修課程以及 B1 與 B2 之後，在 D 系列課程中獲得 2 學分，並在 E，F 系列中獲得 4 學分，總共取得 20 個學分，經過考試可成為升學或其他需要的依據和參考。
- ◆ 學生完成 10 學分的必修課，在選修課程中選修 C1，C2，C3，獲得 6 學分，在 D 系列課程中獲得 2 學分，另外在 E，F 系列中獲得 2 學分，總共取得 20 個學分，即可達到理工、經濟類高等院校的數學要求。
- ◆ 對數學有興趣、並希望獲得較高數學素養的學生，在完成必修課程以及 C1、C2 與 C3 後，並在 D 系列課程中獲得 2 學分，另外在 E、F 系列中獲得 6 學分，總共取得 24 個

學分，經過考試可成為升學或其他需要的依據和參考。

中國大陸的中小學數學標準之書寫方式，與台灣的九年一貫暫行綱要相似，都是以學段為標的，將九年平分為三個學段，並無分年細目。所以他們在實行上或許也會面臨類似台灣當初執行分段設計教科書與評量標準的同樣問題。台灣將六、七年級放在同一學段，而發生小六與初一的銜接問題。大陸將五、六年級放在同一學段，在實行五四制的地區，也就可能發生小五畢業而進入初中讀六年級的銜接問題。雖然標準的書寫方式常以描述能力為主，不過他們列出許多具體例題，所以其用意還算說明得足夠明確。

至於高中數學標準的書寫方式，則是以各課程模組的內容來規範。但是D系列和E系列選修課程常寫得寬鬆籠統，留給教師很多彈性空間。

中國大陸在中小學跟高中的數學課程標準，雖然是分開的兩份文件，但是看得出來有一個共同的精神在，從小學一直貫穿到高中。例如在中小學數學標準的前言，其實就已經提到最主要的兩件事：第一個是與電腦的結合，另一個是建立數學模型。而這兩件事的確是有貫穿到高中。譬如說與電腦的結合，其實電腦在第二學段（4~6年級）就有提到，不過在綱要中只是提到，看不出來究竟要做什麼用。因此我們可以猜想，在小學的時候，其實對於計算機的觀念，或計算機在教學上的應用，並不十分顯著，還是以手算與心算的基本訓練為主。可是到了第三學段（7~9年級），我們就很明白地看到計算機的用意。高中課程標準更是隨處都有提到：『只要條件許可都應該用電腦或計算機』之類的話。所以計算機是有貫穿，只不過貫穿的是在後面六年，也就是七到十二年級。而數學建模這個概念，從小學就開始預備。雖然在小學階段，不會真的有數學建模，因為小學還沒有函數，而數學建模是要找一個數學函數，當作是自然或社會現象的模型；不過我們可以在綱要中看到，想要在小學階段為建立數學模型的能力做準備。

## （五）課綱比較

以下列出一些台灣綱要與大陸課程標準不太一樣的地方。

- 台灣綱要在 1~2 年級理解加減互逆，3~4 年級認識乘除互逆；大陸課程標準則是放在第二學段（4~6 年級）處理。這是設計方式的不同。
- 對於長方形與正方形的面積與周長公式，大陸課程標準在第一學段（1~3 年級）提及，台灣綱要則放在 4 年級。
- 大陸課程標準在第一學段（1~3 年級）認識面積單位，包括平方公分、平方公尺、平方公里以及公頃，台灣綱要在 3 年級認識「平方公分」，4 年級認識「平方公尺」，5 年級認識「公頃」與「平方公里」。
- 對於負數的認識，大陸課程標準在第二學段（4~6 年級）就已提及，台灣綱要放在 7 年級。
- 大陸課程標準在第二學段（4~6 年級）認識長方體、正方體和圓柱的展開圖，台灣綱要在 8 年級理解長方體、正方體、正角錐、正角柱、圓錐、圓柱等立體的基本展開圖。
- 在「機率與抽樣的意義」這個部份，台灣綱要以簡單扼要的幾句話來表達，而大陸



課程標準從第一學段（1~3 年級）到第三學段（7~9 年級），由淺漸深地加以描述，由此可見大陸課程標準對此能力指標似乎較為重視。

- 關於圖形的線對稱，台灣綱要在 5 年級時提到，而大陸課程標準也是從第一學段（1~3 年級）到第三學段（7~9 年級），循序漸進的介紹，這也是大陸課程標準較為重視的地方。
- 大陸課程標準在第三學段（7~9 年級）有提到認識銳角三角函數，包括正弦、餘弦和正切，與其特殊角之值（ $30^\circ$ ， $45^\circ$ ， $60^\circ$ ）。而台灣綱要在 10 年級提到。
- 大陸課程標準在第三學段（7~9 年級）有提到畢氏定理的逆定理，而台灣綱要並未提及。
- 在「相似」與「幾何證明」這些部份，大陸課程標準在此著墨較多，值得我們參考。
- 台灣綱要在 4 年級以對應頂點、對應角、對應邊的關係簡單描述全等的意義，並在 8 年級時詳細敘述三角形所有的全等性質。而大陸課程標準在第三學段（7~9 年級）才探討這個課題。
- 使用量角器實測角度或畫出指定的角，這裡說的指定角在大陸課程標準要求是九十度以內，台灣綱要要求是一百八十度以內。（如：30 度、45 度、60 度、90 度、120 度、135 度、150 度）。
- 純粹從文本來看，大陸課程標準並未提到任何有關取概數的方法。台灣綱要則提到使用四捨五入法。
- 在文本上大陸高中數學標準並沒有提到數學歸納法，台灣暫綱則是在 10 年級提到。
- 台灣暫綱在 10 年級提到輾轉相除法，大陸高中數學標準放在選修課程（F 系列的初等數論初步）。
- 台灣暫綱在 10 年級提到餘式與因式定理包含整係數多項式的一次因式檢驗法，大陸高中數學標準未提及。
- 台灣暫綱在 10 年級提到代數基本定理與勘根定理，大陸高中數學標準未提及。
- 關於複數的定義、複數的四則運算、複數與直角坐標以及複數之極式，台灣暫綱在 10 年級提到，大陸高中數學標準則放在選修（B 系列與 C 系列）。
- 台灣暫綱在 10 年級提到無窮等比級數極限的基本概念，大陸高中數學標準未提及。
- 大陸高中數學標準在選修課程有提到特徵值與特徵向量，並能用它來解決一個實際問題。
- 台灣暫綱在 11 年級有提到遞迴關係數列，大陸高中數學標準未提及。
- 在數列這個部份，大陸高中數學標準在選修（F 系列的數列與差分）還有提到數列的一、二階差分以及它們對描述數列變化的意義。
- 台灣暫綱完全沒提到邏輯（包括邏輯命題、布林運算與證明方法），大陸高中數學標準在 11 年級與 12 年級提到。
- 台灣暫綱在集合論之著墨微乎其微，似乎並不重視。

- 台灣暫綱在 11 年級有提到克拉瑪公式，大陸高中數學標準未提及。
- 關於差分方程，大陸高中數學標準雖然是放在選修 (F 系列) 課程，卻是獨立的一個專題 (F5) 專門介紹，台灣暫綱並未提到。
- 大陸高中數學標準在介紹點、線、面之間的位置關係時，提到歐幾里得的五大公設。並以此為出發點，認識和理解空間中線面平行、垂直的有關性質與判定。
- 大陸高中數學標準的 B 系列課程 (也就是我們的乙組) 有講到微分，跟我們不同，不過都沒有積分。
- 大陸高中數學標準在必修與選修皆用了不少的篇幅介紹演算法，可見對此能力之重視。而從說明與建議這個部份我們可以知道大陸高中數學標準重視的是邏輯思維能力而不只是程式設計。說明與建議節錄如下：

演算法在高中數學課程中是一個新的內容，其思想是非常重要的。但演算法並不神秘，例如運用消元法解二元一次方程組、求最大公因數等的過程就是一種演算法。為了有條理地、清晰地表達演算法，往往需要將解決問題的過程整理成程式框圖；為了能在電腦上實現，還需要將自然語言或程式框圖翻譯成電腦語言。本模組重要的是使學生體會演算法的思想，提高邏輯思維能力。不應將此部分內容簡單處理成程式語言的學習和程式設計。

在大陸高中數學標準「課程的基本理念」中提到：『為了適應資訊時代發展的需要，高中數學課程應增加演算法的內容，把最基本的資料處理、統計知識作為新的數學基礎知識和基本技能。同時，應刪減繁瑣計算、人為技巧化的難題和枝微末節的內容。』我們可以清楚的看到有兩件重要的理念：第一、應把演算法的基本概念當作數學的基礎知識。第二、應刪減繁瑣計算、人為技巧化的難題和枝微末節的內容。非常值得我們參考。

中國大陸在第一學段 (1~3 年級) 把計算速度都規定下來了 (只有在第一學段規定而已)。美國加州和英國也都有類似的速度要求。我們可以看到要求的速度並不算不合理。例如一分鐘做 8~10 題一位數與一位數的乘法。由於要求這種精熟能力，使得學生在以後所需的計算基礎都紮實了。有了基本的算術能力，就能更流暢的探討規律性的問題。例如處理具有一般項的數列，而這種數列規律性其實就是函數的前置經驗。

大陸課程標準有提到方位，這一點台灣並沒有。大陸課程標準從四個方位進展到八個方位，許多國家似乎也是如此。而方位可以視為角度和極坐標系統的一個前置經驗，這也是很生活化的經驗。

在幾何方面，『視角』這個觀念和能力是大陸課程標準從第一學段強調到第三學段的。例如從各個方面觀看茶壺。這不但很生活化、很現實，而且是應用到現代電腦繪圖軟體裡面的一個極為重要的思考方式與操作方法。這種幾何教育能夠幫助學生有效地操作 3D 建模軟體。另外還有立體圖形展開圖，例如方盒、圓柱的展開圖，這也是很實際的應用幾何，對 3D 設計也有幫助。不管是視角還是展開圖，都跟現有的計算機軟體都很有關係，可以幫助國家培養未來做設計的人才，非常值得我們參考。

中國大陸在第二學段已經引入未知數  $x$ 。台灣其實已經教了孩子未知數的意義，可是總是用正方形或三角形來表示未知數。我們的小朋友在三四年級已經學英文了，而  $x$  只不過是個英文字母，就跟寫甲乙丙丁是一樣的，為什麼不用  $x$  呢？大陸在第二學段已經有  $x$  了，這  $x$  不是變數的意義，在這是未知數的意義，等到第三學段的時候再來學習新的變數意義。這樣就在學習變數以前有三年的時間來習慣未知數的意義和符號，也值得我們參考。

大陸的課程標準對於符號的乘法公式，明白寫出來的只有兩條。分別是  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$  和  $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。相對來說真是少之又少。其實各國寫在綱要裡的乘法公式都不算多，最多的韓國也不過是六條。

中國大陸非常重視估算。台灣也說我們重視估算，不過台灣只有在前言和附錄的地方說我們重視估算，從整個綱要似乎看不出來這個觀念要如何落實。但是我們可以很清楚看到中國大陸落實這件事。中國大陸把估算用在兩個地方：一個是計算以前，在計算以前讓學生有能力估計答案大概是多；第二個是計算以後，在計算之後要能夠估計答案合不合理；特別是用計算器做出答案後，要有意識去檢查那答案是否合理。

舉一個作者（單維彰）在生活上實際碰到的例子。某一天，他在漢堡王點了三份套餐，還加點了薯條加大和飲料加大這些附餐。基本上一份套餐大概是一百元左右，結果這三份套餐點完服務生算出來是 217 元。這是應該立刻感覺事情不對的時候，也就是說如果算出來是三百三十幾元，甚至到三百六七十，我們大概都還可以接受，因為我們還有加點東西；但是如果算出來是兩百多或者四百多，那就不應該是對的。這就是估算的意義。當時作者很好心地跟服務生說算錯了，結果那位服務生重算出來的結果卻是 430 元。這還是不可能正確的。最後經理出來重算，結果應該是三百五十幾元。這就是估算訓練很重要的事情。那位服務生顯然已經讀完高中了，可是卻毫無估算的概念，三份套餐一下算兩百多，一下算四百多，都沒有感覺到不對勁。這是估算跟生活與工作息息相關的一個例子。

其實中國大陸對於估算在第一、第二學段（1~6 年級）強調的比第三學段（7~9 年級）還要多。也就是從小就要有這個估算能力。不但要有這能力，也要有這意識，也就是會想到必須做這件事。至於為什麼第一、第二學段強調的比第三學段多，其實也算合理，因為第三學段並沒有太多計算的算術，而算術應該要在小學的時候完成。算術的結果合不合理，應該要在小學有這意識去檢查。到了國中在解代數問題的時候，過程當中還是算術，解出來的結果合不合理，要有感覺。因此，在小學的時候，估算是一個很重要的能力和意識。

在計算與解題的方法上，大陸中小學三個學段都鼓勵多樣性，但是鼓勵的方法不太一樣。在第一學段是鼓勵老師讓學童在演算法上有多樣性；第二學段就不說演算而是說解題策略的多樣性；到了第三學段既不強調演算法也不強調解題策略的多樣性，乾脆就用一個比較抽象層次的說法：要尊重個體差異。

關於計算工具的使用，大陸在第一學段完全沒有提到計算器；第二學段開始提到計算器，不過我們覺得只是提到而已。因此在第二學段我們可以假設計算器並不是重點，不會在課堂上大量的使用，只是開始使用計算器。從第三學段開始就很清楚看得出計算

機的用處了。計算機的用處有兩個面向：一個是幫助計算，一個是當作舉例的對象。在計算方面，具體來說，學生要能夠拿科學型計算器來做平方根、立方根、大數計算、三角函數、三角比的值、無理數的近似值。大家通常只想到拿計算機來幫助學生計算，或做大量複雜的資料處理；而大陸課程標準會拿計算機來舉例子，把它當工具來用，或當成討論的對象。

我們大部分看到的數學例子，都是拿物體；比如說分蘋果。而大陸拿計算機當例子，就好像電視、冰箱那樣生活中常見的物品。以這樣的眼光來舉例的確是一個學習數學有意義有價值的舉例方式。例如在講平面幾何時，他會拿電腦螢光幕來當例子；電腦螢光幕就是一個平面坐標，電腦螢光幕的原點是放在左上角，以像素為單位，橫的有 1024 個光點，直的有 768 個光點，螢光幕上的每一個光點就有一個整數的坐標。對一個接觸電腦的學生而言，是很實在的經驗。要讓數學的學習內容有意義的話，其實不能忘記很多學童最熟悉的東西就是電腦。而且電腦本來就是靠著各式各樣的數學觀念造出來的，因此將會有很多很順利的例子能夠拿電腦來當作數學教育的舉例對象。

估算能力可以說是和計算器操作技能相輔相成而一併學習的項目。先有估算能力，然後才開始使用計算器，而以估算能力來檢驗計算器的答案。

## 五、韓國

### (一)學校教育制度

韓國的基礎教育架構分別為：小學 (elementary school) 6 年，初中 (middle school) 3 年，合併為九年義務教育，和高中 (high school) 3 年。四年制大學、兩年制的專科大學及職業大學，以及更高的研究所學位不在此述。

韓國自 1969 年廢除初中入學考試以來，初中招生便改為按區域抽籤分配的制度，不讓學生自行選擇學校。這一改變旨在消除重點中學和普通中學之間的差別，並免除學生入學考試的壓力。高中入學制度也於 1974 年修訂，經國家會考合格的學生，可以按區域通過抽籤辦法決定自己就讀的高中 [H1]。這種修訂廢除了每間學校自己主持的考試，以期望高中教育具有同等的水平。這樣的修訂，使得初中畢業後升入高中學習的學生比率也隨之增加（在 2002 年初中畢業生有 99.5% 進入高中就讀 [H2]），而現在聽說初中升高中主要依據初中三年的在校成績（依比例初三成績最重要）來分配到家附近的高中 [H4]。

### (二)授課時數

韓國 1—12 年級之學科以及授課時數分配，請看下表。

	年級	初等學校						中等學校			高等學校	
		小一	小二	小三	小四	小五	小六	初一	初二	初三	高一	高二三
科目	國語	210	238	238	204	204	204	170	136	136	136	選修 13 6 學分
	公民 道德	道德 生活 60	道德 生活 68	34	34	34	34	68	68	34	34	
	社會			102	102	102	102	102	102	136	170	
	數學	120	136	136	136	136	136	136	136	102	136	
	自然 科學			102	102	102	102	102	136	136	102	
	生活 科技	智慧 生活 90	智慧 生活 102			68	68	68	102	102	102	
	體育			102	102	102	102	102	102	68	68	
	音樂	快樂 生活 180	快樂 生活 204	68	68	68	68	68	34	34	34	
	美術			68	68	68	68	34	34	68	34	
	外語 (英)	我們 是一 年級 80		34	34	68	68	102	102	136	136	
彈性 課程	60	68	68	68	68	68	136	136	136	204		
課外 活動	30	34	34	68	68	68	68	68	68	68	8 學分	
每年 節數	830	850	986	986	1088	1088	1156	1156	1156	1224	144 學分	

以上表格的國民共同基本教育時間，以 34 週為基準，表示一學年最少授課節數。一年級的科目、彈性課程、課外活動排定的時間是以 30 週為基準，『我們是一年級』課程是 3 個月的授課時數。初等學校（國小）每節課的時間是 40 分鐘、中等學校（初中）是 45 分鐘、高等學校（高中）是 50 分鐘。但按照氣候、季節、學生發展程度、學習內容可以調整。11、12 年級的課外活動是 2 年內要必修的學分數。表格內是每年最低授課節數，此外還安排彈性課程的節數給一些科目增加節數：基礎的彈性課程是為了進階與補充教育；而創意的彈性課程是為了配合各學校的獨特性、與觀察學生的主動學習狀況所設立的課程。實施的規則有：

1. 初等學校的彈性課程按照各學校的狀況排定，但重點放在促進主動學習能力。
2. 中等學校的彈性課程是每年 102 小時，先排定漢文、電腦、環境、第二外國語（德文、法文、西語、中文、日文、俄文、阿拉伯語等）選修科目，其他時間的運用是國民共同基本課程的進階、補充學習時間。另外創意的彈性課程每年排定 34 小時。

1. 高等學校 1 年級的彈性課程必修為 10 學分，其中 4~6 學分可安排國民共同基本課程的進階與補充，另外 4~6 學分可安排選修課程。但職業高等學校的彈性課程可代替主修教育課程。創意的彈性課程排定 2 學分。

2. 高等學校 2、3 年級的彈性課程是給普通科目的選修科目來利用的，但是只有超過三學分的科目才能使用彈性課程。我們應當可以猜測，數學是可以使用彈性課程的科目之一。課外活動的編排與經營如下：

1. 能按照各區域、學校的特性、學生的要求，排定課外活動時間，但必須維持各領域之間的均衡。
2. 沒有排定時間的科目，再按照各學校的情況排定時間。
3. 按照各學校的需求，增加、分配或統合課外活動。

整個基礎教育的課程，分成以下兩大類：

● 國民共同基本教育課程，從小一到高一。分成以下三種：

◆ 學科，分成若干領域：

■ 1--2 年級，六個領域：韓語、數學、道德生活、智慧生活、快樂生活、我們是一年級（最後這項只在每年的三月份對 1 年級實施，為期四週）

■ 3--9 年級，十個領域：韓語、公民道德、社會、數學、自然科學、生活科技、體育、音樂、美術、外語

◆ 選修活動 (optional activities)，分成

■ 小學的選修活動主要屬於「創意活動」：綜合學習或自我訂定目標的學習活動

■ 初中、高一的選修活動主要屬於「補充教學」：各校按其特色或學生需求，提供更深或補充的學科課程，或是額外的課程（教育部建議以中文、電腦為優先）

◆ 社團

● 高中選修課程，放在高二、高三。分成兩種：

◆ 學科，又分成

- 普通學科，分成十二個領域：以上十個領域（含數學），外加中文和軍訓
- 職業學科，分成農、漁、工、商、家政、體育、藝術、外語、國際事務

#### ◆ 社團

初等學校的教育目標，放在培養學生基本生活能力與良好的生活習慣。中等學校的教育目標則有：

1. 追求身心均衡發展，並有機會發現發展自己的潛能。
2. 培養基本學習能力、生活能力、解決問題能力，並完整的表現自己的意見與想法。
3. 能夠使學生接觸各種領域的知識，積極探討自己的未來方向。
4. 讓學生能以我國傳統文化為驕傲，並能夠發揚光大。
5. 理解民主主義的基本價值與原理，學習民主主義生活方式。

至於高等學校的教育目標則是：

1. 培養身心均衡且健康的人格，擁有成熟的自我意識。
2. 學習邏輯、批判、創意思考能力的態度。
3. 學習各種領域的知識與技能，開展適合自己的未來。
4. 能將我國文化發揚光大於全世界。
5. 努力發展國家生命共同體的基本觀念，並加強擁有全球化意識。

在數學的教學目標方面，韓國數學課程則著重於依據學生具體的經驗，將事物的現象用數學的方式解釋。從具體表徵漸漸抽象化的過程中，讓學生發現數學形式或關係而了解數學的概念、原理與法則。

### (三) 數學科課綱簡介

韓國國民共同教育基本課程中的數學部分區分為六個領域：「數與計算」、「幾何」、「測量」、「機率與統計」、「文字與公式」、「規則性與函數」，而每個領域分為十個階段，每個階段就是一個年級，而每個年級又分為 A、B 兩學期。

在高中方面，高一課程即為國民共同基本課程數學科的第十階段（十年級），從高二起提供應用數學、數學 I、數學 II、微積分、機率與統計和離散數學供高二、高三的學生選修，雖然說是六個選修，但是數學 I 是高二文、理組的必修，數學 II 和微積分是高三理組的必修，而應用數學、機率與統計和離散數學是與國民共同教育基本課程數學科十階段無相關性的選擇性科目，因此我們只拿數學 I、數學 II 和微積分來和台灣高中數學暫行綱要做比較。

整個數學綱要看的出是一到十二年級的一貫性，而一到十年級的國民共同教育課程是一個整體，說明了韓國人民數學應該要有的基本能力。

純粹就兩份文本的內容來比較，我們得到以下較為深刻的印象。完整的比較對照表請看附錄五。此處韓國數學教育課程是韓國教育大學教務長所提供，由政治大學教育系韓國僑生李海娟翻譯的《韓國數學教育課程》（此教育課程於 1997 年公布，2000 年 3 月 1 日開始實施 [H5]）。

#### (四)課綱比較

首先是韓國數學教育課程比台灣綱要稍早或詳細的部分：

##### 數與量

- 韓國在 5 年級談到小數的除法，台灣綱要在 6 年級 (6-n-04) 才談到。
- 韓國在 9 年級教到有理化分母，台灣綱要在 10 年級才提到。
- 韓國在 8 年級提到有理數與循環小數的關係，但台灣綱要並未提及。
- 在時間計算方面，韓國在 2 年級提到時間的互換，台灣綱要在 3 年級 (3-n-11) 才提到。
- 韓國在 2 年級開始做三位數以內的加減估計，台灣在 3 年級 (3-n-08) 才提到。
- 韓國在 8 年級提到近似值與誤差的觀念，但台灣綱要也未提及。

##### 代數 (含樣式、關係、函數與坐標圖形)

- 韓國在 10 年級有再次提到函數的意義並說明合成函數、一對一函數、週期函數以及反函數，而台灣綱要並沒有仔細說明。
- 韓國在 8 年級提到直線的斜率，台灣綱要 10 年級才提到。
- 韓國在 9 年級的測量主題內提到三角函數 ( $0^\circ-90^\circ$ )，而台灣綱要 10 年級才提到。
- 韓國在 10 年級提到有理函數、無理函數 (根式) 並描繪其圖形，但台灣綱要並沒有提到。
- 韓國在 10 年級提到三個未知數的一次聯立方程式，台灣綱要在 11 年級才提到。
- 韓國在 10 年級提到二元二次聯立方程式，台灣綱要並未提及。
- 韓國在 11 年級提到矩陣，台灣綱要在 12 年級才提到。
- 韓國在 10 年級提到圓方程式，台灣在 11 年級才提到。
- 韓國在 8 年級提到一次聯立不等式，但台灣綱要在一到九年級中並未提到。
- 韓國在 10 年級提到二次不等式與二次聯立不等式，台灣綱要並沒有提及。
- 韓國在 10 年級提到三角函數不等式，在 11 年級提到指數函數與對數函數不等式，但台灣綱要都並未提及。

##### 圖形與幾何

- 韓國在 2 年級認識平面圖形的構成要素 (例如交點、邊的個數)，台灣在 4 年級 (4-s-01) 才提到。
- 韓國在 3 年級認識直角三角形，台灣在 4 年級 (4-s-07) 才認識。
- 韓國在 4 年級提到三角形的內角和，台灣在 5 年級 (5-s-01) 才提到。
- 韓國在 4 年級已談到計算四邊形的內角和，台灣在 6 年級 (6-s-01) 才談到。
- 在計算柱體表面積方面，韓國在 6 年級已提到直立柱體和圓柱的表面積，而台灣要在 8 年級 (8-s-35) 提到。
- 在認識立體圖形的展開圖方面，韓國 5、6 年級已提及，台灣綱要在 8 年級 (8-s-33) 才提到。
- 在尺規作圖這部份，韓國 5 年級開始尺規作圖 (例如畫適合條件的三角形)，台灣綱要在 8 年級 (8-s-33) 才學。



### 集合、邏輯、排列組合與機率統計

- 韓國在 7 年級提到相對次數與累積次數，台灣網要在 9 年級 (9-d-01) 才提到。
- 韓國在 6 年級已談論機率的概概念，台灣到了 9 年級 (9-d-09) 才開始接觸。
- 在統計這方面，韓國重視學生能將資料用圖表 (長條圖、圓餅圖) 表示，他們在 3 年級已提到製作圖表，而台灣在 5 年級 (5-d-01) 才開始接觸。
- 韓國在 11 年級說到標準差和常態分佈，台灣網要在 12 年級才提到。
- 韓國在 7 年級提到集合的概念 (集合、元素、元素陳列法、條件提示法、有限集合、無限集合、空集合、部分集合、集合相等、凡氏圖 (Venn Diagram)、聯集、交集、全集、餘集)，在 10 年級又再次提到，但是台灣網要 11 年級才提到，而且並不仔細。
- 在邏輯這方面，韓國在 10 年級提到命題，台灣網要並沒有提到。
- 韓國在 11 年級提到獨立事件、條件機率、二項分配，台灣網要都在 12 年級才提到。
- 韓國在 10 年級提到散佈圖，台灣網要在 12 年級才提到。

### 數學分析

- 韓國在 12 年級提到合成函數的連鎖微分率，但台灣網要卻沒有提到。
- 韓國在 12 年級提到三角函數、指數函數、對數函數、隱函數、反函數以及參數表示的函數的微分，但台灣網要卻沒有提到。
- 韓國在 12 年級提到微分均值定理，而台灣網要卻未提及。
- 韓國在 12 年級提到三角函數、指數函數和對數函數的不定積分，而台灣網要卻沒有提到。
- 韓國在 12 年級提到代換積分法和分部積分法，但台灣網要卻沒有提到。

接著是台灣數學網要較韓國數學教育課程稍早或詳細的地方：

### 數與量

- 台灣網要在 3 年級 (3-n-10) 學習一位小數的加、減計算，韓國數學課程在 4 年級才提到。
- 台灣網要在 3 年級 (3-n-09) 學習同分母分數的加、減問題，韓國數學課程在 4 年級才提到。
- 台灣網要在 4 年級 (4-n-08) 提到分數的擴分，韓國數學課程在 5 年級才提到。
- 台灣網要在 2 年級 (2-n-17) 已經提到面積的概念，韓國數學課程到 5 年級才開始面積的概念；而且台灣 5 年級有提到較大的面積單位 (公畝、公頃、平方公里)，韓國並未提及這些單位。
- 台灣網要在 4 年級 (4-n-17) 認識立方公分，5 年級 (5-n-17) 認識立方公尺，韓國數學課程到 6 年級才提到立方公分和立方公尺。
- 台灣在 10 年級提到輾轉相除法，而韓國數學課程並沒有提到。

### 代數 (含樣式、關係、函數與坐標圖形)

- 台灣網要在 8 年級 (8-a-07) 提到勾股定理，但韓國數學課程在 9 年級才在幾何領域中提到。

- 台灣綱要在 7 年級 (7-a-14) 提到一次函數的圖形，韓國數學課程在 8 年級才提到。
- 台灣綱要在 7 年級 (7-a-07) 提到一元一次不等式，韓國數學課程在 8 年級提到。
- 台灣綱要在 7 年級 (7-a-16) 提到二元一次聯立方程式，韓國數學課程在 8 年級才提到。
- 台灣綱要在 8 年級 (8-a-13) 提到一元二次方程式，韓國數學課程在 9 年級才提到。
- 台灣綱要在 8 年級 (8-a-10) 提到因式分解，韓國數學課程在 9 年級才提到。
- 台灣在 10 年級提到指數與對數函數，韓國數學課程在 11 年級才提到。
- 台灣在 10 年級提到三角函數和角、倍角和半角公式，韓國數學課程在 12 年級才提到。
- 台灣在 10 年級提到三角函數的正、餘弦定理，但韓國數學課程並沒有提到。
- 台灣在 10 年級提及代數基本定理，而韓國數學課程並沒有提到。
- 台灣在 10 年級提到虛根成對定理，而韓國數學課程並沒有提到。
- 台灣 12 年級提到增廣矩陣，但韓國數學課程並沒有提及。
- 台灣在 11、12 年級提到行列式，但韓國數學課程並未提及。
- 台灣在 11 年級提到球與平面的關係，但韓國數學課程並沒有提到。
- 台灣在 11 年級提到圓錐曲線的物理性質，但韓國數學課程並沒有提到。
- 台灣在 12 年級提到柯西不等式和算幾不等式，但韓國數學課程並沒有提到。

#### 圖形與幾何

- 台灣綱要在 4 年級 (4-s-03) 已提到全等的觀念，而韓國數學課程在 7 年級才提到。
- 台灣綱要在 3 年級 (3-n-17) 認識角度，韓國數學課程在 4 年級才提到。
- 台灣在 10 年級提到複數平面、複數的極式以及極坐標的概念，而韓國數學課程並沒有提到。
- 台灣在 11 年級談到內積，韓國數學課程在 12 年級才提到。
- 台灣在 11 年級有說明向量應用於平面幾何的證明，韓國數學課程在這部份並沒有提及。
- 台灣在 11 年級提到直線參數式，但韓國數學課程並沒有提到。
- 台灣在 11 年級提到平面坐標、垂直投影、兩直線的夾角和柯西不等式，但韓國數學課並沒有提到。
- 台灣在 11 年級提到空間坐標，但韓國數學課程在 12 年級才提到。
- 台灣在 11 年級提到空間概念 (空間中直線與直線、直線與平面、平面與平面之位置關係)，韓國數學課程在 12 年級才提到。
- 在空間坐標裡，台灣 11 年級談到平面法向量、直線與平面方程式、向量內積，韓國在 12 年級才提到。
- 台灣在 11 年級提到平面夾角、點到面的距離、兩線距離，但韓國數學課程並沒有提及。
- 空間上的正投影，台灣在 11 年級提到，韓國數學課程在 12 年級才提到。

#### 集合、邏輯、排列組合與機率統計

- 在統計這部分，台灣綱要 9 年級 (9-d-04~9-d-07) 有教導學生計算中位數、眾數、四分位數，但韓國數學課程裡並未提及，只提到教導計算平均數。
- 台灣 11 年級遞迴關係，但韓國數學課程並未提及。
- 台灣在 12 年級提到相關係數、迴歸直線和最小平方法，但韓國數學課程並未提及。

## 數學分析

- 台灣在 12 年級提到割線斜率與切線斜率的關係，但韓國數學課程並沒有提到這種關係。
- 台灣在 12 年級提到導數的定義，但韓國數學課程並沒有提到。
- 台灣在 12 年級提到牛頓法求根，但韓國數學課程並沒有提及。

整體看來，在數與量這方面，韓國對於小數與分數之間的關聯有一個比較小心的鋪陳。一個分數要寫成小數，有可能是無窮循環小數（8 年級提到），所以韓國把分數與小數相等的觀念，一直到 9 年級說到「無理數的概念」才完成。台灣這方面，在 4 年級只談到簡單的分數與小數的互換，在五年級對於分數換成小數只是求一位概數，皆未提到循環小數的概念。或許韓國在此的處理就比較務實。

韓國在 7 年級講了二進位乍看之下覺得有點突兀，因為這直覺是與計算機概論有關的東西，而韓國在 7 年級之前，都沒有談到與電腦有關的內容。不過在看了韓國初一的教科書之後，才發現這是用來做對位的練習，爲了要知道學生是否了解十進位的意義，所以綱要才會提到，因此綱要也把二進位跟十進位放在一起。

在代數這方面，韓國對於函數有一個很好的鋪陳。台灣放在九年一貫「代數」這個主題內，而韓國以一個主題「規則性與函數」來仔細引導。他們先讓學生從一年級就開始觀察數、事、物的規則性，例如從數列中找規則，從物體的大小、位置、方向、顏色跟學生的經驗尋找規則等。從綱要陸陸續續看出，只要學一些新的能力跟知識，就要利用新的能力、知識來練習一下規則性的發現。學生能由規則、預測、確定等方法解決多樣的問題，例如在 5 年級理解簡單的對應表，在 6 年級就能將兩個數的對應關係，用□、△表示，這就幾乎要寫出  $y=f(x)$  的關係了。從 7 年級開始引導  $x$  為變數的觀念，用函數圖表、直角坐標系、函數的應用來理解函數的概念。

在圖形與幾何這方面，韓國 1 年級用觀察各種物體的形狀來分辨幾何形體，小孩用觸覺、視覺去辨認幾何形體，親身體驗比較能對幾何形體有感覺。在 2 年級有一個相似或全等的前置經驗，就是能看出物體或平面圖形的移動、翻轉的變化關係。

在機率與統計這方面，韓國的綱要在一年級開始做分類，2 年級認識圖表等，5 年級開始講資料的平均值，6 年級首次提到機率和機會，7 年級開始有分佈圖，8 年級再回來說機率和次數頻率實驗值的關係。先從直覺來說機率，然後用統計真實的抽樣或實驗來做分佈圖，然後再回來看分佈圖是一個實驗的結果，而後再說理論上機率應該是多少。因此 6、7、8 年級把機率概念做了一系列細緻的鋪陳。台灣的機率與統計總課時一點都不比外國少，但是鋪陳得不好，教學顯得比較沒有效率。初中時期的統計幾乎都集中在 9 年級教。

韓國在 7 年級以及 10 年級都講了集合。7 年級講集合應該是前置經驗，到了 10 年級再講一遍集合，然後講邏輯。因為集合與邏輯的概念和操作本來就是對應的，所以先有集合的概念要學邏輯會比較順利。

韓國在 10 年級綱要被認為是全國國民數學基本教育的完成，所以不管是數與計算、機率統計、幾何等韓國都認為一般人應該要學到的都在 10 年級這年完成。第一個完成的就是數的系統，介紹了虛數和複數。與我國的處理方式一樣，複數是被二次多項式的虛根導引出來的。事實上，複數在三次或四次多項式方程式的公式解裡有著更重要的地位，

被比較之各國中，只有新加坡提到這個事實。這樣教複數就會更有意義了，也比較有實用性。

相對來說，韓國在 10 年級幾何的完成就比較不夠完整。因為在 10 年級說了平面坐標、圓方程式、圖形的移動等等，課題相當多，感覺有點倉促。機率統計則還在描述統計的階段，對於一個隨機變數的描述：平均值、標準差、分佈圖等。在此全國必修的統計機率課程也完成了。規則性與函數最後講到三角函數，而三角函數教的是初級的，沒教和差化積、積化合差等公式，應該是因為用不到才沒教那麼多。

在每一個階段、每一個主題的敘述之後，都有『教學方法』，而方法中都說：「要適當的運用能力分班。」所以韓國從小一到高三都容許數學科能力分班的教學方法。雖然韓國的輿論也反對能力分班和補習，但是政府頒佈的綱要並沒有排斥能力分班的教學方法。

在高中選修課程方面，數學 I 能增加對數學的基本概念、原理、法則與思考、推理、創意能力以及作為「數學 II」的基礎。在高二上學期應該是先教指數、對數的定義與運算規律，下學期才教指數函數與對數函數，這又反應了韓國人設計綱要很注重鋪陳。數列這方面也是如此，先講有限再講無限。而數學 I 的機率統計已經講到推論統計。

數學 II 是修完數學 I 之後，為了學習高階的數學所選擇的科目。本科目學習更進階的數學知識與思考能力、推理，讓學生合理解決問題。本科目是自然科學與理工學科的學習基礎，適合給想進修理工學系的學生來修讀。在解析方面，談到微積分，但是只有多項式的微積分。雖然這方面講得蠻清楚的，但可惜的是，前面 10 年級說的有理函數跟無理函數（根式）沒有在這地方發揮，例如分項分式的積分。而在幾何方面，說到二次曲線，感覺教了很多內容。這看起來有點不合理，因為這樣看起來，課有些重，況且理科學生三年級還要有一個微積分的選修，以及要準備大學考試呢！

微積分是修完「數學 II」中，多項函數的微積分之後，選擇學習更高層的微積分的課程。說明三角函數、指數函數和對數函數的微積分，還有如合成函數、隱函數、反函數的微分技巧，以及一些積分法等等。這些內容大約涵蓋了台灣大一微積分上學期的三分之二內容了，這也再次顯示韓國理組學生高三下學期的課程負擔有多重。

機率與統計主要是讓學生學習生活中的機率與統計的選擇性課目，隨著資訊化時代的來臨，加強學生的資料處理能力與統計推理能力，並利用統計了解社會現象與自然現象。這內容沒有超過前面國民共同基本課程的機率與統計所講的範圍，這也是我們沒把它放入比較表中的原因。

離散數學，「選擇與排列」內的排列組合沒有超過數學 I 裡所講的範圍，不過值得一提的是它教了演算法，對於一個走主流課程的學生來說，如果能夠修此門課也不錯。這樣的數學教育看來是在擴大自己的範圍，除了理論以外，也可以增加應用的內容。

在整個綱要中，只有離散數學跟應用數學比較認真在說「計算機與電腦」，而其他主題也只是一句話帶過，看起來不太踏實。整體看來，在資訊工具融入數學教育這一方面，韓國跟台灣一樣，屬於比較保守的處理方式。

## 六、日本

### (一)日本教育改革

「日本的學習指導要領」取自日本文部科學省（相當於我國的教育部）網站之「報告・發表一覽」中，其網址為<http://www.mext.go.jp/>。其小學、初中部分所參考的版本為李園會教授之翻譯，高中部分則是委託留日碩士蔡知穎小姐與林謹君小姐代為翻譯，詳細資料請看參考文獻 [Y5]。台灣部分則是根據「九年一貫數學學習領域修訂綱要」及「95年高中數學暫行綱要」。日本的學習指導要領，是由文部科學省制定並指導全國中小學教科書的基準文件，各出版社的教科書都要按照其內容編撰，各級教委也被要求採用最符合學習指導要領的教科書。日本課程為了配合實施一週上課五日制及綜合學習時間的納入，於1998年12月14日由文部省公布正式的「小、中學學習指導要領」，在2002年3月正式實施。而高中的學習指導要領（普通、專門及綜合學科均適用於此）則在1999年3月公布，又因為高中科目較繁多，所以比中小學晚一年，於2003年3月正式實施。這期間的移轉階段分別為，小、中學是在2000年與2001年，高中則是從2000年至開始正式實施的時間 [Y2, Y3, Y4]。

隨著時代的變遷、社會結構的不同，日本大約每十年就會對學習指導要領做檢討並改進，但在2003年8月7日的「教育審議會期中總結」中做了一項變革，即對學習指導要領的內容不斷的檢討修正。日本課程改革的最高指導機構為「中央教育審議會」，執行的單位則為文部科學省，現行的學習指導要領跟以往有很大的出入，如授課時數及課程內容的彈性化、課程內容的簡單化以及導入綜合學習時間，將課程內容難度較高的部分刪除或放到更高年級中，其中數學的授課節數約縮減20%（小學14%，初中18%），內容難度則約刪減20%到30%。不過就整個資料來看，日本的學習內容即使降低了，卻仍然不見得比台灣的學生學得少，特別是以高中畢業時的數學份量。就目前所得的資料，我在底下約略列出對舊制數學課程的內容做刪除及轉移的部分。

（表一、數學課程的刪除及轉移）

舊制數學課程的轉移及刪除形成現行的數學課程		
刪除的課程	小學階段	<ul style="list-style-type: none"><li>• 多位數的計算</li><li>• 含帶分數的複雜分數之計算</li><li>• 不等號公式</li><li>• 梯形和多角形的面積</li><li>• 較有深度的單位換算</li><li>• 正多角形</li><li>• 次數分佈</li><li>• 較難的比值計算</li></ul>

	初中階段	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 平行移動、旋轉移動及對稱移動 (第7學年)</li> <li>• 立體的剖面、投影 (第7學年)</li> <li>• 條件充足的圖形 (第7學年)</li> <li>• 數的表現 (近似值、二進法及流線圖) (第8學年)</li> <li>• 平方根表 (第9學年)</li> </ul>
統合轉移	轉移至低學年	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 圓和直線 (切線) (第9學年 → 第7學年)</li> <li>• 扇形的弧長和面積 (第9學年 → 第7學年)</li> <li>• 一部分概率 (第9學年 → 第8學年)</li> </ul>

<p>的課程</p> <p>轉移至高學年</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 二位小數點的加減法 (第 1 學年 → 第 2 學年)</li> <li>• 時鐘學習 (第 1 學年 → 第 2 學年)</li> <li>• 大於、小於的計算 (第 2 學年 → 第 3 學年)</li> <li>• 小數和分數的導入 (第 3 學年 → 第 4 學年)</li> </ul> <p>小學的數與計算 → 初中的數與式</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 文字式 (第 5 學年) → 文字與式 (第 7 學年)</li> </ul> <p>小學的量與測定及圖形 → 初中的圖形</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 圖形的全等 (第 5 學年) → 圖形的相交條件 (第 8 學年)</li> <li>• 圖形的對稱 (第 6 學年) → 平面圖形 (第 7 學年)</li> <li>• 縮圖和擴大圖 (第 6 學年) → 圖形與相似 (第 9 學年)</li> <li>• 角錐、圓錐、柱體的展開圖、柱體和錐體的體積及表面積 (第 6 學年) → 空間圖形 (第 7 學年)</li> </ul> <p>數量關係</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 「比例的式」與「反比例」(第 6 學年) → 比例、反比例的式和坐標圖 (第 7 學年)</li> <li>• 實際場合的調查方法 (第 6 學年) → 概率 (第 8 學年)</li> <li>• 相似的圖形 (第 7 學年 → 第 9 學年)</li> <li>• 數的集合與四則 (第 7 學年 → 第 10 學年 (數學 I))</li> <li>• 一元一次方程式 (第 8 學年 → 第 10 學年 (數學 I))</li> <li>• 有理數與無理數的用語 (第 9 學年 → 第 10 學年 (數學 I))</li> <li>• 二次方程式的公式 (第 9 學年 → 第 10 學年 (數學 I))</li> <li>• 相似圖形的面積比及體積比 (第 9 學年 → 第 10 學年 (數學 I))</li> <li>• 球的面積及表面積 (第 9 學年 → 第 10 學年 (數學 I))</li> <li>• 三角形的重心 (第 8 學年 → 第 10 學年 (數學 A))</li> <li>• 一部分圓的性質, 即二個圓的性質 (第 9 學年 → 第 10 學年 (數學 A))</li> <li>• 資料的整理及標本調查 (第 9 學年 → 第 10、11 及 12 學年 (基礎數學、數學 B 及數學 C))</li> <li>• 各式各樣的事象和函數 (第 9 學年 → 第 10 學年 (數學 I))</li> </ul>
<p>備註：由 2005 年 4 月文部科學省的最新公布得知數學科欲增加「立體的截面與投影」、「解二次方程式的公式」等課程。</p>	

就報導得知，目前的日本為了抑止學力的降低，所以在 2005 年初已經在重新檢討其各科課程綱要，包括數學科在內，各科教科書的頁數將會大幅增加，且內容也會變得更深更難，就數學科而言，其頁數約增加 23% [Y16]。

在數學教育上，日本希望讓學生達成以下的目標：

1. 培養基礎的知識和技能，養成對週遭環境具有條理的觀察能力。
2. 透過數學活動，培養學生對數學的興趣並能利用數學原理及法則處理事物，進而應用在生活上。
3. 讓學生理解數學的基本概念、原理及法則，提高學生的創造力。
4. 讓學生了解數學的看法與想法的益處，進而能運用數學的思考模式處理事情。

在教育目標方面，日本根據其學校教育法規定：

- 小學之教育目的是「以適應身心發展，實施初等普通教育為目的」。
- 初中之教育目的是「在小學教育基礎上，適應學生身心發展，實施中等普通教育為目的」。
- 高等教育之教育目的是「在初中教育基礎上，適應學生身心發展，實施高等普通教育及專門教育為目的」。

## (二)學制

二次大戰後，日本依據美國第一次使節團報告書制定了「6-3-3-4」的單軌制，這學制一直延用至今，包含小學6年、初中3年、高中三年、大學4到6年。另外，大學院修士課程2年、博士課程五年（相當於我國的研究所和博士班）。同台灣一樣實施九年義務教育，小學階段為滿六歲至十二歲的六年，中學階段為修完小學課程至15歲的三年。從小學進入初中階段不需經過入學考試，完成初中學業後若想繼續升學，便可選擇考上高中或入讀五年制的高等專門學校，而高等學校畢業後還可就讀短期大學2年、專門學院、專修學校及函授學校。為了解決學生學力降低及授課時數的不確定，使學校及教師有更多充分的時間做課程的安排及評估，讓學生達成多元化的學習，所以日本在2003年8月7日的「教育審議會期中總結」提出「2學期制度」的新學制，改進以往的3學期制度 [Y9]。

(表二、日本的學期制度)

二學期制									
學期期間	第一學期 (4/1 日至 9/30 日)					第二學期 (10/1 日至 3/31 日)			
		4/1 至 4/7	4/7 至 7/20	7/21 至 8/24	8/25 至 10/6	10/7 至 10/9	10/10 至 12/23	12/24 至 1/7	1/8 至 3/24
學期活動	學期開始的休假	正式上課 (期中考)	暑假	正式上課 (期末考)	秋期休假	正式上課 (期中考)	寒假	正式上課 (期末考)	學期末的休假



年度授課時數	普通、職業學系：1280 時間 特別進學：1526 時間
--------	---------------------------------

日本小學一節課是以 45 分鐘為原則，初中則以 50 分鐘為原則，全年要安排 35 週（小學一年級為 34 週）以上的教學計畫，但根據現行的學習指導要領規定「各學科的每單位教學時數在確保每年教學時數的原則下，並考慮學童的發展階段及各學科與學習活動的特質，作適當的規定」[Y5]。也就是說，可以彈性地對授課時間作增加或縮減的安排，例如小學校一年級新生在學習算術時，無法連續坐 45 分鐘，則可將時間縮減為 30 分鐘，又或者是採隔週上課或集中於某週上課。因此，各校也不一定要針對三十五週做教學安排。其中小學一週中有二天是授課 6 小時，其他三天則是授課 5 小時。底下則分別列出小學及初中的課程及授課時數。

（表三、日本小學課程及授課時數，2002 年）

區分		第一學年	第二學年	第三學年	第四學年	第五學年	第六學年
各學科的授課節數	日語	272	280	235	235	180	175
	社會			70	85	90	100
	算術	114	155	150	150	150	150
	理科			70	90	95	95
	生活	102	105				
	音樂	68	70	60	60	50	50
	圖畫工作	68	70	60	60	50	50
	家庭					60	55
	體育	90	90	90	90	90	90
	道德授課節數	34	35	35	35	35	35
	特別活動的授課節數	34	35	35	35	35	35
	綜合學習時間授課節數			105	105	110	110
	總授課節數	782	840	910	945	945	945
備註：1、此表授課時數的 1 單位時間為 45 分鐘。 2、特別活動的授課節數可以利用班級活動抵充。							

（表四、日本初中課程及授課時數，2002 年）

區分		第一學年	第二學年	第三學年
必修教科 授課時 數	國語	140	105	105
	社會	105	105	85
	數學	105	105	105
	理科	105	105	80
	音樂	45	35	35
	美術	45	35	35
	保健體育	90	90	90
	技術家庭	75	75	35
	外國語	105	105	105
道德授課節數		35	35	35
特別活動授課節數		35	35	35
選修教科授課節數		0~30	50~85	105~165
綜合學習時間授課節數		70~100	70~105	70~130
總授課節數		980	980	980
備註：1、此表授課時數的1單位時間為50分鐘。				
2、特別活動的授課時數是依據教學大綱裡所製定的班級活動（除了有關學校供餐的部分）來作為安排。				
3、選修教科的授課時間是根據中學學習指導綱領，選修教科時間學生可選修學科或特別活動。				

就學科課程而言，初中與小學的最大不同是多了選修領域，初中的必修教科有國語、社會、數學、理科、音樂、美術、保健體育、技術家庭、外國語，其中外國語以修英語為原則而技術家庭中規定資訊基礎為必修科目。選修教科有國語、社會、數學、理科、音樂、美術、保健體育、技術家庭、外國語及其他必要的學科。關於選修教科的設置是交由各學校自行安排，而學生在選修教科時間上可選修學科或特別活動，至於選修的修課規定與以往的綱要有些許的不同，以往是在第三學年才能夠進行全學科的選修，但目前則是從第一學年起就可以了，目的是要讓學生能多元化且更適性的發展。

「綜合學習時間」是現行綱要中新設立的，其教學內容在綱要中並沒有具體指出，而是由各校及教師發揮想像力及創造力自行安排活動的內容與名稱，不過有特別指出不可以完全由團體活動和學校例行活動來取代，主要的目的則有下列幾項：

1. 對於國際理解、資訊科技、外語會話、環境保護、社會福祉及地方特色做橫的聯繫，因此小學生可以利用這段時間學習英語會話。
2. 安排學生感興趣的課題，引起學生學習動機。
3. 配合當地特色或學校特色安排課程，讓學生對於所處的環境具有認同感。

其授課時間是自小學三年級以上開始自高中結束，小學及初中都有規定學年總授課時數，即自第三學年起平均一週三節，而初中各學年則是一週二節，詳細的時數則請參看表三及表四，而高中部分則沒有規定總授課時數，但有說明到畢業為止若授課105~210節，可給予3-6個學分。

日本的高等學校是採「單位制」（類似於台灣的學分制），以50分鐘為一單位時間，

三十五單位時間（即一學年）為一單位（相當於我國的兩學分），需修滿 74 單位方能畢業，約相當於我國的 148 學分，且高中的普通學科及科目的最低必修單位數為 31 單位。全日制（即日間部）每週以 32 單位時間為準，全年則以三十五週為準。其課程內容可分為必修及選修兩個部分，無論是普通高中及職業高中的學生都必須修讀高中學習指導要領所規定的學科，底下就列出日本高中的課程節數表，至於必修規定則在其後有詳細的說明。

（表五、高等學校之普通教科、科目及單位數，2003 年）

教科	科目	單位數	教科	科目	單位數	
國語 (日語)	國語表現 I	2	保健 體育 體育	體育 保健	7~8 2	
	國語表現 II	2				
	國語總合	4				
	現代文	4				
	古典	4				
	古典選讀	2				
地理 歷史	世界史 A	2	藝術	音樂 I	2	
	世界史 B	4		音樂 II	2	
	日本史 A	2		音樂 III	2	
	日本史 B	4		美術 I	2	
	地理 A	2		美術 II	2	
	地理 B	4		美術 III	2	
公民	現代社會	2		工藝 I	2	
	倫理	2		工藝 II	2	
	政治・經濟	2		工藝 III	2	
數學	數學基礎	2		書道 I	2	
	數學 I	3		書道 II	2	
	數學 II	4		書道 III	2	
	數學 III	3		外國語	口頭溝通 I	2
	數學 A	2			口頭溝通 II	4
	數學 B	2	英語 I		3	
	數學 C	2	英語 II		4	
		閱讀	4			
		寫作	4			
理科	理科基礎	2	家庭	家庭基礎 家庭總合 生活技術	2 4 4	
	理科總合 A	2				
	理科總合 B	2				
	物理 I	3				
	物理 II	3				
	化學 I	3				
	化學 II	3				

	生物 I	3		情報 A	2
	生物 II	3	情報	情報 B	2
	地學 I	3		情報 C	2
	地學 II	3			

關於必修科目及學分數的相關規定如下所示：

1. 國語科中，從「國語表現 I」、「國語表現 II」及「國語總合」中任選一種，單位數為 2-4。
2. 地理歷史科中，從「世界史 A」及「世界史 B」中任選一種，單位數為 2-4。另外，從「日本史 A」、「日本史 B」、「地理 A」及「地理 B」中任選一種，單位數為 2-4。
3. 公民科中，從「現代社會」或「倫理」、「政治・經濟」中任選一種，單位數 2-4。
4. 數學科中，從「數學基礎」及「數學 I」中任選一種，單位數為 2-3。
5. 理科中，從「理科基礎」、「理科總合 A」、「理科總合 B」、「物理 I」、「化學 I」、「生物 I」及「地學 I」中任選二種，但「理科基礎」、「理科總合 A」及「理科總合 B」中至少要選一種，單位數為 4-5。
6. 保健體育科為選修中的必修。
7. 藝術科中，從「音樂 I」、「美術 I」、「工藝 I」及「書道 I」中任選一種，單位數為 2。
8. 外國語科中，從「口頭溝通 I」及「英語 I」中任選一種，單位數為 2-3。
9. 家庭科中，從「家庭基礎」、「家庭總合」及「生活技術」中任選一種，單位數為 2-4。
10. 情報科（資訊）中，從「情報 A」、「情報 B」及「情報 C」中任選一種，單位數為 2。

針對日本高中數學來看，共分做數學基礎、I、II、III、A、B、C 等七部分，其中數學基礎是在這次綱要中新設立的，目的是為了讓學生習得數學史並擁有數學的思考及見解，因此在學習指導要領中的內容較無牽涉到一般的數學課題，所以不列入比較之中。必修科目為數學基礎與數學 I，其他均為選修科目。底下列出學生選修的相關規定：

1. 若想選修「數學 II」及「數學 III」，原則上必須按「數學 I」、「數學 II」、「數學 III」的順序來修課。
2. 若想選修「數學 A」，則可同時與「數學基礎」或「數學 I」修習，也可修完「數學基礎」或「數學 I」後再選修。
3. 若想選修「數學 B」，則必須修完「數學 I」後才可以選修。
4. 若想選修「數學 C」，則必須修完「數學 I」及「數學 A」後才可以選修。

日本的全國必修數學課程到 10 年級（也就是高一的數學 I）為止。其他的數學高中課程都是選修。就課程資料來看，日本提供了非常多樣而豐富的課程供高中生選修，例如數學課程就有五門一學年的選修課程。

就綱要的書寫方式而言，日本的學習指導要領為了避免學習內容的重複與不足，所以小學部分除了算術及自然科之外，還針對社會科的第三及第四學年與其他課程的目標、內容採取二學年一貫的方式，也就是說各校可依此並針對學生的實際情況擬定二學年的課程計畫，使教學更具彈性，更符合學生的需求。至於初中的部分，國語、音樂、美術的二、三年級採二學年一貫的策略，社會、理科、保健體育、技術家庭、外國語是

採三年一貫，數學則依每學年實施。由此可知，對於數學科，無論是在小學、初中或者是高中均沒有將整個學習時間分段，而是逐年撰寫各年級的學習綱要。

### (三)比較

就各個國家的比較來看，日本在學習指導要領的描述是較簡略的，相對於其他國家而言，顯然是留了較多的空間給各校及各教師，對於內容有更大的彈性。日本在學習指導要領中為了使內容更有系統性且清楚易懂，在小學部分每個年級均將算術分成四個領域，分別為「數與計算」、「量與實測」、「圖形」及「數量關係」；將中學部分的數學分成三個領域，分別為「數與式」、「圖形」及「數量關係」。在高中部份，為了方便比較，就以台灣為主。底下則針對台灣與日本在小學、中學及高等學校之數學課程內容的差異性做較詳細的比較與解釋。

#### 數與量

1. 就時間的認識，台灣是在一年級上學期就引進這個概念給學生，先只教學生看懂整點或半點，但日本及韓國卻分別是在二年級及一年級下學期才介紹。這樣的處理方式是可以提供我們做為一個參考，是否我們可以考慮在學生真正對 0~59 有初步的了解後，再導入對時間的認識會更為恰當。
2. 針對餘數的學習，日本與台灣均在三年級時開始提到。
3. 台灣在 3 年級時就對數線有做初步的引入，教導數線就是數與點的對應，而日本則是在 4 年級才提到。
4. 針對三角形部分，台灣在一年級就有提到，而日本則到三年級才開始認識，而且是先講述直角三角形，直到四年級才介紹一般的三角形，但值得注意的是，為何在四年級時才剛教學生認識並了解角的測量及其意義後，就要學生能夠馬上知道三角形的內角和。
5. 對於面積的算法，日本在 5 年級時就已提到圓面積公式，而台灣則是在 6 年級時才有提到。
6. 針對正方體與長方體的算法，台灣在 5 年級就已經介紹了，但日本則在 6 年級提到。對於計算簡單柱體體積及其表面積台灣是在 6 年級介紹，日本則是到 7 年級才針對柱體與錐體體積、扇形面積和弧長做計算。由此可知，日本在這方面是比台灣晚一年的。
7. 就綱要來看，台灣在面積、體積及周長的部分，對於認識各單位的處理可以參照其他各國，考慮是否該將這些單位分開來教，或者是在某一年將其教授完畢，如此，是否也顯得較有連貫性，像日本或其他各國如韓國、英國等都是這樣的做法。
8. 針對小數與分數的順序，台灣與日本是有所不同的，台灣先提到分數再提到小數，即分數是在 2 年級提到，小數是在 3 年級提到，但日本卻是先教小數再教分數，即 4、5 年級先學習完小數，等到 5、6 年級再學習分數，這種處理方式跟新加坡是一樣的。
9. 在分數的處理上，台灣在 2 年級就已經學習基本的同分母加減運算（分母小於 12），5 年級就已經在做異分母的比較與加減。但日本在 4 年級才開始介紹分數的意義，5 年級才做同分母的分數之加減法，並沒有提到乘除，直到 6 年級才開始學異分母的真分數之加減法並學習乘數和除數為整數與小數的意義和計算概念。針對這部分而言，其

前面的鋪陳會顯得有點緩慢，而 6 年級所教的進度又太過於急促，即學生在 6 年級時都還沒有真正學會異分母的計算，就要學習更深入的問題，這樣的處理方式顯得比台灣及新加坡都還不恰當。

10. 在高中部分，台灣於 10 年級有列出輾轉相除法及平方根之四則運算及有理化分子／分母，日本則沒有。在這部分台灣均為 10 年級課程，但日本對於數學歸納法、虛數及複數均放入 11 年級的課程內，所以這些項目均被日本列為選修課程，就我們比較的國家中，中、台、韓三國均將其列為必修課程，而其他國家如英國、美國、加州則像日本一樣將其列為選修課程。

### 代數（含樣式、關係、函數與坐標圖形）

1. 台灣 1 年級的學生就已經開始被灌輸加法交換律及結合律、加減互逆的基本概念，但就日本的學習指導要領來看，低年級時並沒有提到這件事，而是五年級時才告知教師必須能使學生利用交換律、分配律、結合律來提升做計算的效律、加強計算的技巧。單就這方面來看，對於計算的技巧，台灣顯得比日本還要更早注重這件事。
2. 台灣在 2 年級時就開始學習如何使用數學式子表示情境問題，循系漸進的加深，直到高年級部分就要學生學會解情境問題的技巧及方法，相對的，日本在這方面就沒有特別說明，只約略提到何時該用加減乘法等式子來表示。由此可明顯感覺到，台灣在這部分是較為注重的。
3. 台灣在小學 6 年級時就教學生使用  $x$ ,  $y$ ,  $\dots$  等未知數符號，但日本卻是在 7 年級才提到。
4. 台灣與日本在處理二次方程式求解的要求頗為相似，均強調簡單化，如日本只須講解  $x$  項係數為偶數的例子即可。
5. 台灣在 9 年級就讓學生學會二次函數的基本概念及繪圖方法，但日本在高中以前並沒有相關的說明，是到 10 年級才教導學生理解二次函數。
6. 就綱要來看，簡單的指數律，台灣同日本一樣在小學及初中時並沒有特別提到，只有提到二次方根的意義及計算，其中台灣是在 8 年級而日本則是在 9 年級，至於較深的指數問題，在台灣 10 年級與日本 11 年級均有提到。
7. 台灣於 10 年級有提到斜率、特殊角的三角比及公因式與公倍式，於 12 年級提到行列式及其性質、矩陣的乘法及列運算、圓錐曲線光學性質、球面方程式及二元線性規劃，而這些課程均是日本在學習指導要領中沒有提到的部分。
8. 日本於 10 年級有列出圓的性質之課程，以加深對圓形的理解，而台灣則在 9 年級提到。
9. 日本跟台灣一樣，在高中以前的九年完全沒有提到  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ ，但在處理上顯得比較合理。日本在高一時只講三角比，也就是只探討比值，只讓學生了解  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$  是直角三角形的斜邊、對邊及鄰邊所造成的比值，讓學生先有這樣的概念後再導入函數的觀念，這跟台灣一開始就介紹三角函數的處理方法是有很大的不同。

### 圖形與幾何

1. 台灣會在二年級時先認識水平與鉛直的概念，進而讓學生認識垂直與平行的現象，但日本是在五年級時才透過對圖形的觀察了解到直線的平行跟垂直的關係，就學習指導要領而言，並沒有提到鉛直與水平的概念，這跟台灣的處理上是不太一樣的。
2. 日本跟台灣一樣對於物體的觀察會描述到前後、左右、上下及遠近，但日本卻多了方向的用詞。
3. 針對圖形的部分，日本與台灣及韓國的處理頗為類似，會先讓學生認識並觀察立體的基本圖形，再介紹平面圖形給學生了解，之後才又更深入探討立體圖形。就日本而言，日本在一年級會先觀察立體圖形，二至五年級則探討平面圖形的概念，偶而會有零星的介紹立體圖形，如四年級的球體直徑或者是用很生活化的方式說明立體圖形，如用盒子、箱子來形容。對於圓的介紹，日本是比台灣還要晚的，即台灣在3年級就已經開始介紹，但日本卻是在4年級時才開始。至六年級則是講述三角柱、四角柱等角柱及圓柱，但卻不探討這些柱體的展開圖，至中學也都未曾在對展開圖做討論。跟台灣不一樣的是，台灣在6年級還多介紹了圓錐的認識，這是日本所沒有的，同時在8年級時還會針對柱體的展開圖做討論。
4. 台灣在8年級時提到全等性質以及尺規作圖，而日本在7年級時就要學生開始學會並運用基本的繪圖方法，至8年級則有少量的證明，單就日本的學習指導要領看來，日本並不強調要學生學會很多的證明，而是要讓學生了解證明的意義與方法，培養理論的考察能力。
5. 台灣在8年級時有提到勾股定理及其應用，但日本沒有。
6. 針對三角形的相似性質，台灣與日本均在9年級時介紹。
7. 對於外心、內心、重心的認識，台灣在9年級就已經提到了，但是日本卻將此部分放到高中課程，即10年級才提到。
8. 針對因式分解，台灣在8年級就已經提到，而日本則是在9年級才首次談到因式分解及多項式的展開。台灣與日本都明白列出四條乘法公式。(韓國列七條，中國大陸列二條，新加坡列四條)。
9. 台灣於10年級有提到複數與直角坐標及複數的極式，但是日本沒有。
10. 針對向量及空間而言，台灣較日本描寫的還詳盡，台灣會提到向量及空間中的各種應用，如柯西不等式或點到平面的距離。但日本在向量中就只有提到向量及其運算、向量的內積而已。空間向量日本的作法也是如此，日本提得不多，只是要讓學生理解到向量在平面上與空間上的處理方式是類似的。
11. 台灣在11年級時有提到球與平面的關係，但日本沒有提到。

#### 集合、邏輯、排列組合與機率統計

1. 台灣的學生在一年級時對統計就有初步的認識，卻要跳過二年級到三年級時才再引入這樣的課題，針對這種作法是否會讓人有種不連貫的感覺，這是值得我們注意的。日本在三年級才開始出現統計的觀念，且一開始就要學生了解並學會看基本的統計圖表(如柱狀統計圖表的讀法)，這跟台灣一開始所學的內容相比是較為深入的。四年級

時日本學生就已經學會利用兩數的變化關係做成圖表，而這兩數的關係，顯然是學習函數關係的前置經驗，以便未來能更容易學習函數的概念，這部分是值得我們注意並學習。

2. 日本在 8 年級時有對機率的基本概念作簡單的介紹，但台灣是在 9 年級才提到，同時還多介紹簡單實驗的初步概念。台灣在 9 年級有提到統計的基本名詞，如平均數、中位數，但日本卻沒有提到。
3. 高中部分，台灣在 11 年級時提到排列組合及利用排列組合引述相關的機率問題，直到 12 年級時，才更深入的探討，但這個部分，日本並沒有提到抽樣方法、亂數產生器、信賴區間及信心水準及貝氏定理。顯然，就這份比較而言，台灣在這方面的學習內容是比日本還要繁多。

### 數學分析

1. 台灣在 10 年級有提到循環小數，但日本沒有。
2. 對於數列的一般式，日本在 11 年級（數學 B）有特別提到，但是台灣在綱要中並沒有說明。
3. 台灣在 11 年級有提到遞迴關係，但日本沒有。
4. 日本在 12 年級有提到三角函數、指數與對數函數的導函數，但台灣卻只有在 12 年級提到多項式函數之導函數，而沒有提到其他的。
5. 針對反導函數的部分，日本在學習指導要領中均沒有提到，但台灣在 12 年級時是有提到。
6. 對於極值的部分，日本相對於台灣而言，著墨的地方較為少量，只有在 12 年級（數學 III）提到數列  $\{r_n\}$  的極限，其他都沒有提到。
7. 台灣在 12 年級有提到牛頓法求根，但日本沒有提到。
8. 日本在 12 年級時會明白指出學生該學何種積分法，即置換及部分積分法，但台灣綱要中則沒有清楚點出。
9. 日本在高中部分，即 12 年級（數學 C）要讓學生能夠理解簡單數值計算的演算法，如整數、近似值的計算，並能用簡單的程式語言來表現，但台灣卻都沒有提到相關的議題。就這方面而言，日本顯得比台灣更注重電子計算機在數學上的應用。

純粹就台灣與日本兩份文本做比較，兩國的綱要頗為類似，其內容順序及課程內容大致上是蠻一致的。單就課程內容來看，台灣的描述是較日本詳細許多，也比較能夠了解學生所該學習的是哪些知識，但日本則只約略說明學生該學的部分及範圍，這顯示日本的綱要是強調彈性化，並賦予教師及編書者有更大的空間，如日本小學在五年級對  $\pi$  的使用，可以用 3 來計算或者是在周長為已知的情況下可用計算器來求直徑，但過於簡化課程卻也引起一些爭議，如  $\pi$  該用 3 或 3.14。

日本的小學部分，其「數與計算」的重點是在於了解數的大小及其計算結果的預測，「量與實測」則是針對量的單位意義及大小的理解，「圖形」則藉由觀察實際物品而作基本的分類或作圖，而「數量關係」則是著重在學生能學會將資料作簡單的分類並表示成



圖表。整體而言，日本的小學數學是較著重在學習「數量」和「圖形」的基本知識，不鑽研較艱深的問題，而是反覆練習讀、寫、算，並培養日常生活中的基礎知識和技能，同時也強調實物的觀察、操作、測量及實驗的方法，不過就內容的分量及時間教授的長短來看，數與計算這部分所占的比例是較重的。日本中學部分則是延續小學，加深學生理解文字的使用及式的意義，培養學生的表達能力及邏輯思考。統計與機率部分，小學及初中階段並不是很強調。對於心算和估測，日本在三年級時有特別說明，台灣也是有強調估算的重要性，但對心算卻沒有特別說明，而其他國家如中國、英國及新加坡等也都很強調心算的重要。從第三學年開始講概算及心算起，第四學年、第五學年都有其一貫性的在強調心算、估算、估測的重要性，像第四學年起正式的定義了四捨五入作為的概數，在五、六年級都有繼續在四捨五入的概數在加減乘除的計算。

針對輔助工具而言，日本在三年級時有特別說明要讓學生學會用算盤作計算，台灣並沒有特別提到。在計算工具的使用上，日本則說明低年級（一、二、三）應該使用具體的教具和算盤，而高年級（四、五、六）則准許使用算盤和計算器了。日本在小學、初中、高中的綱要中都有強調教師在指導各學科時要在適當的時機能夠活用電腦及視訊網路以提升學生的學習效果，但並沒有明確指出何時該用。同時，日本的資訊網路也已相當普遍了，在1998年時，日本約95%的小學有電腦的配合，52.8%的小學設有電腦專用教室，13.6%的學校設有網路連線，但近來日本許多人卻認為使用計算器輔助運算對於學生的數學計算能力並沒有多大的幫助。

#### （四）日本教改的教訓

日本學生在數學成績方面一直以來都表現的相當優異，但過去的填鴨式教學，使得日本大部分的學生只知道怎麼計算、怎麼拿高分，卻不懂得如何應用，學習的意願更是低落，據報導指出日本學生在分析數據結果上比進行簡單的四則運算的能力要差很多，這說明了日本的學生比較偏重計算。2000年8月10日朝日新聞中，以國、私立大學17所學校的大一生4000人為對象，請他們解答從初中至高中程度的數學25題，就國中程度的小數點問題，某國立大學的誤答率達42%，而高中程度的誤答率達66%[Y13]。而2003年，經濟合作發展組織（Organization for Economic Cooperation and Development，簡稱OECD）針對41個國家所做的「國際學生評量計畫」（Programme for International Student Assessment，簡稱PISA）的調查，日本15歲青少年在數學領域平均成績的排名為第6（香港第1、芬蘭第2、韓國第3、荷蘭第4、澳門第9），而2000年的調查當中，日本的排名則為第1，由上面兩個例子可以看出日本教育的改革使學生的數學能力有下降的趨勢，不僅是數據的顯示，日本多數的民眾也如此認為，他們開始對學校教育感到憂心，而且有不少的私立學校並沒有跟進這波教改，所以大學的入學考試並沒有因為公立學校簡化課程內容而降低難度，這令不少家長擔心自己的孩子在升學考試下處於不利的狀態，而寧願花大筆錢送孩子進昂貴的私立學校與課外輔導上（目前日本全國的課外培訓機構已多達50000家，2005年的學生人數也比前一年多了12%。[Y12]）。

為了抑止教育品質的下滑，日本已經開始著手進行補救辦法，日本中央教育委員會在2004年時提出幾項建議：1、重新調整課時安排或縮減假期等方式，提供學生充份的學習時間。2、學校應該被告知綱要只是一個基準，教師可針對學生的需求做適度的調整。

而文部大臣河村建夫也接收此項建議，希望能在 2005 年 4 月開始修訂，但是否已開始實行，目前不得而知。

## 肆、課程綱要與施政主軸關聯性

### 一、現代國民

在知識爆炸與知識經濟的時代，現代國民必須要『終身學習』才能跟得上時代的進步，也才不至於在全球化的過程中被淘汰，這是聯合國教科文組織出版的報告書《Learning: The Treasure Within》所闡述未來學習的預測藍圖。報告書中並強調，學校教育應該提供結實的核心知識與技能，使得它能夠成為支持終身學習的共同基礎。而在中小學階段，此所謂共同基礎的核心知識與能力，咸認為是語文（包括本國語言和現代外語）、數學和資訊工具。

數學是科學的語言，也是理性思維的基礎。過去大家總認為，數學是所謂的『科學之母』，通常只有以科學或工程為生涯規劃的人，才需要多知道一些數學。但今時今日，數學在更廣的層面影響了更多的人，我們在工作上、日常生活中，甚至是休閒娛樂的型態上，都已經大量的數位化。隨著計算機的快速發展，使得人們可以處理大量的數據與資料，這促成了所有的經驗科學學門在進行數量化的革命，如計量經濟、生物資訊等學門的興起；而傳統的科學與工程學門，則在邁向數學深化的潮流，比如計算物理、計算化學、計算生物、財務數學…等學門的產生。透過數學模型的建立，計算機的模擬，人們可以在計算機的虛擬世界裡進行天氣預報、災害防治、星際探索、藥物合成、材料複合甚至影音藝術的表演等，這些模擬的背後都是數學。尤有甚者，今日的網絡搜尋、風險管理、通訊保密、國防安全等的關鍵技術，也都是數學。數學對於我們現代社會、現代國民的影響，遠比過去大得多。因此，要符合『現代國民』的施政主軸，數學在教育裡面所佔的份量顯得比以前更加重要。

在此認識之下，再比較其他國家的數學科授課時數，我們發現目前台灣國民教育的數學課時不足。或許各國都已經體認到，如前段所述，要將國民提升成為一個具有全球競爭力的現代國民，數學的基礎教育比以前更為重要。因此，除了日本以外，各國都是每天至少有一節數學課；美國加州的「一節」數學課還比其他課程的時間更長：90 分鐘。而我們從報導中得知日本近日已檢討並開始改變他們的教育措施。所以，就數學課時來看，我國的中小學課程規劃，若不在課時安排上比照其他國家，實已不能呼應政府『現代國民』的施政主軸。

另一個與授課時數同等重要的，則是數學科題材內容。目前 92 綱要已大致與世界一般標準接軌，在高中部分，基於長年的考試領導教學影響，數學學習淪為一堆技巧的堆

積，教學現場充滿了人為刁鑽的難題與許多未能與具體世界結合的題材，並且也完全沒有使用科技工具。高中課綱設計上並未對此問題詳加規範，這種發展趨勢不能呼應政府『現代國民』的施政主軸。

在授課時數與題材內容以外，還有基本心算能力的重視程度不同。我們曾經有印象，認為西方國家不太重視孩子的計算能力，只有我們東亞國家比較重視。但是現在我們發現，美國加州的公立學校在整個小學階段都訂定了心算能力標準，並且施測。英國也已經開始強調基本計算的能力，在國家級的評量或考試之中，明確規定了每一學段的心算能力量化標準。中國大陸則是在第一學段（1—3年級）的課程標準中明文規定學童的心算能力。這些規定有其督促與勉勵作用，而且並沒有過份的要求。例如要求一分鐘能處理8至10題一位數與一位數的乘法，只要熟練九九表，人人可以輕易達到此要求。台灣的數學課程綱要已經比上一版的暫綱更重視基礎心算能力了，但是比較起來仍稍不明確，我們擔心這對於將來的潛能開發將造成負面影響，而不能呼應政府『現代國民』的施政主軸。

在教育制度方面，我們發現各國的「全國標準課程」最多就是一至十年級：以十年、而不是上個世紀常見的九年設計，來完成一般國民的基礎教育。而最遲都是從十一年級（即是高二）開始分流。

分流的方式通常就是提供非常多樣性的選修課程。這種教育制度的演變，也反應出各國政府對於『後期中等教育』的觀點演變：第一、幾乎所有國民都需要後期中等教育，第二、這段時期的教育將要輔助國民開始個人的生涯規劃，所以應該提供更實際的、更豐富多樣的課程選擇。就數學課程而言，各國在高二、高三階段盡量提供學生不同深度、不同目的、甚至不同主題的數學課程。而台灣的體制並非如此。95暫綱假設學生在高三才開始分流，顯然與世界上其他的國家是不同的。就我國高三的選修課程而言，其豐富性與多樣性也比不上其他國家。基本上，所謂選修應該是選A或選B（例如韓國綱要之實施要點就指明，如果要開選修課，就一定要開兩門以上讓學生有所選擇）。但是根據95高中暫綱的規劃，我國高三學生的數學課程雖言「選修」，卻是「選」或「不選」數學課的選擇。這似乎並不符合世界上各個國家對於所謂「選修」的認識和實施辦法。因此，在後期中等教育的選修制度上，我們認為並不符合政府『現代國民』的施政主軸。

最後，國際比較的文獻資料顯示，各個國家都已經認識到計算機的發展，對於我們學習的內容，乃至於學習的方法，都影響甚鉅。因此，計算機的能力的掌握，對現代國民而言是相當重要的。但是各國並沒有在中小學基礎教育中開設一門新的課程，來專門教導學童使用計算機，或是準備將來操作電腦軟體的基礎知識，反而都是把計算機的基礎知識融入到數學的教育裡面。這個作法是相當合理且自然地，因為計算機的基礎原理即是數學，而數學的基礎能力有一大部分直接就是將來操作電腦軟體的前置經驗。這方面的著墨，尤以中國大陸為明確。因此，我們提醒這個概念：考慮在數學課程中，適當地包含將來能夠用來理解和操作電子計算機的內容，以期更能呼應培育『現代國民』的施政主軸。

## 二、台灣主體

台灣要生存，有賴於強大的經濟力與獨立的國防力，現代國家都認為經濟力與國民的數

學素質直接相關，而國防力的重要一環，高科技能力，是以數學為基礎；比如我國的國防密碼技術，在目前需仰賴進口，而密碼技術實為數學。因此台灣生存的一個要素是國民有優良的數學素養。

數學是理性思維的基礎，數學中估算能力、邏輯思維能力、證明能力等都可以剔除傳統文化中非理性不精確的積弊，提升數學教育的品質可以形成新的理性文化內涵。

數學雖早已是全球化的國際語言，但各地方仍保有一些區域化的特色，如度量衡。但是我們發現新綱要中並不包括我國民間習用的度量衡單位，例如『坪』、『台斤』、『市尺』等等。刪除這些民間度量衡單位或許是可惜的事。因為這些單位，一方面符合我們的生活現實，二方面是能提供好的教育機會，很實際地在單位轉換時發生小數乘法或小數除法的計算需求，而且也造成概算和估算的實際教學課題。

### 三、全球視野

在全球化的過程中，我們應該追求文化的領先與科技的優勢，才不致於被大國宰制。先進國家如美國、英國、法國、日本、北歐諸國等都相當重視數學；而發展中國家如中國、新加坡、印度、俄國、韓國等也都會強調在國家發展中數學的重要性。因此我國數學課程標準也應向這些國家看齊。

這整份報告有一大部分就是在做國際比較，因此都是關於政府『全球視野』施政主軸的呼應性檢討。其中數學課時不足是由全球視野中看到我國課綱缺陷之處。其他部分在此就不再贅述了。

### 四、社會關懷

後期中等教育的選修制度，其意義並不一定在於分流或者能力分班，而是在於「適性教育」。在這個時期，各國都認為應該要供學生更多的選擇，強調學習的多樣性，尊重個人的差異性，或者不同地區的差異性。這何嘗不是一種社會關懷？

除了後期中等教育的選修以外，適當、平等（立足點的平等和機會的平等）的能力編班或分組，也都是外國中小學教育的常見政策，他們並沒有將能力分班視為洪水猛獸，也似乎並不認為那是開民主倒車、開自由倒車的行為。外國實施能力分班或者「跑班制」的經驗，也許值得更細緻地研究，以便獲得此一議題的另一種意見。我們想要提議，分流選修與能力編班，或許其實才是政府『社會關懷』的正面回應！

我們以為在中小學階段，教師應鼓勵學習前段的學生協助學習落後的學生，以培養學生關懷弱勢的情操與互助合作的精神。另外，國家應提供更多資源及優秀的師資去協助學習落後的學生，比如說在中小學階段，各學區也可在暑期辦理數學科輔導班，協助學生回到正常學習軌道；在高中職階段，則可規劃程度合適的數學補救課程，提供學生選修。

## 伍、綱要內容與實施方法之評估

### 一、課程綱要之一貫性與銜接性

#### (一)各國綱要之一貫性與銜接性

在我們比較的國家或地區當中，只有美國加州和韓國，是將一到十二年級的整個數學課程綱要寫在同一份文件裡面（加州是從幼稚園開始寫起的）。或許每一個階段的數學綱要，並不一定是由同一群人實際製作，但至少是由同一個委員會裡面的幾個小組共同設計出來。因此，這兩份數學課程綱要的內容在銜接上、以及在設計理念上的一貫性，都已經很明顯地表現在文件裡面。

新加坡全國一致的數學課程綱要只涵蓋到中二（相當於我們初二），之後的兩個階段皆沒有國家制定的綱要，而是根據考試的標準。考試單位會公告考試內容標準，以及標準模擬試題以資參考。因此，他們將考試目標和深度相當明確地規範出來，是很務實地以考試領導教學。民間根據考試目標編輯教科書，由學校自行挑選。我們可以將小一到中二的數學課程視為全國國民都需要學習的基礎知識，所以理論上此基礎知識不見得可以銜接到後面為了考試而學的數學。但實際上，我們從文獻上考察的結果卻認為可以銜接上。我們認為新加坡的綱要，一方面表達了政府認為全國國民都必須要知道的基礎數學，二方面是目標明確地銜接未來參加證照考試所需的預備知識。

英國一共制定了四個階段（Key stages）的全國教育標準，其中前兩個學段相當於我國之小學（一二年級、三到六年級），第三個學段相當於初中，第四學段則相當於高一、高二；也就是說，英國的學段涵蓋了我國的一到十一年級。在四個階段結束之後，有些學生會再讀兩年的所謂 A-level 課程，目的是參加 A-level 考試以申請進入大學。那兩年的數學課程就是直接以 A-level 考試標準作為學習綱要，情況與前述之新加坡相同，以考試的標準來引導教學。英國在前四個階段訂定的全國數學課程標準，寫在一份「國家標準課程」文件之內，理念的一貫性與內容的銜接性都非常明顯。最為特別的是，英國的各科課程標準文件之間有 Cross References，例如數學課程標準的主文旁邊，會以註記方式聲明某一項要求需要以英文課程或資訊科技發展文件的某些項目為基礎。所以可能其他課程標準文件（例如科學課程），也會以同樣形式註記他們的教學是以哪些數學課程的項目為基礎。

日本和中國大陸都與台灣類似，中小學的數學綱要呈現在一份文件，高中的數學綱要寫在另外一份文件。由此可推知，其數學課程綱要是由兩個不同委員會所制定的，而其書寫方式與數學內容分類的方式也都稍有不同。雖然日本與中國大陸是將中小學與高中的課程分開，但就文獻分析來看，我們認為他們有一個更高的協調機制，將這兩份數學課程綱要的主要設計精神的貫穿起來，並照顧到內容銜接的合理安排。

值得注意的是，雖然十年級屬於高中階段（高一），但是中國大陸和日本的全國一致之數學標準內容，皆是修到十年級為止。因此，他們的高一數學課程，可以視為基礎數學教育的結束點，也可以視為中小學課程與高二、高三選修課程的銜接點。

再舉大陸方面的例子。有兩個課程設計理念上的主軸，貫穿在他們的兩份課程標準文件之中：一個是建立數學模型，另一個是培養學生的估算能力與意識。我們看到中國

大陸（韓國和新加坡也類似）從小四開始、繼續到初中階段，在數學的應用問題方面，放進了建立數學模型的前置經驗，而在高中時期正式而大規模地實行數學建模的活動。

因此，雖然中國大陸的中小學數學綱要與高中數學綱要，看起來是制定於兩個不同的委員會，分別寫在兩份文件裡面，但是這兩份綱要的設計理念是一貫的，內容安排是順利銜接的。可以見得，我們並不一定需要將十二年的數學綱要寫在同一份文件裡面，且不一定非要由同一個大型的委員會來製作。或許只需要在這些委員會之間有一個完善的協調機制，就能照顧課程綱要的一貫性與銜接性。

## (二)我國綱要之一貫性與銜接性

我國九二綱要、九五高中暫綱及九五高職暫綱，是由三批不同的人訂定，似乎沒有上層委員會來協調，因此，我們沒有看出有十二年一貫的理念、目標、內容主題及能力主軸的設計，所呈現的格式也不相同。但九年一貫的設計是可以適度延伸到十二年，這一點，我們在課程架構分析中已說明。如用十二年一貫的觀點來看，我們提出下面幾個問題：

1. 高中職課綱內容規範過簡問題：高中職之 95 暫綱是以分年單元編寫，其具體內容僅作必要之說明。這種大綱內容僅作簡要規範的設計，行之已久，它提供了教科書編者、老師以及大考(本學力測驗與指定考試)出題教授相當大的空間可以發揮。但什麼是合理的範圍與深度，每一個人的看法都不相同。通常教科書編得較簡單，指定考試的題目較難，而學校老師、補習班老師的題目更難。這使得高中教學現場發展成以題目為主的教材取代了教科書，而題目中充斥了許多人為的刁鑽難題，造成學生不合理的負擔以及不能掌握基本的東西。這一部分的導正，需要在課綱內容做適當的規範，並且考試制度也要一併作調整。
2. 內容主題的一貫性：
  - (1)函數可以從代數主題中抽離，另立為一主軸：函數是用來表徵量與量的關係，和現實世界適當結合，高中的三角函數、指對數函數都不適合放在代數主題中，較恰當的作法是另立為一主題。由函數的主軸來看，高中多項式的最高公因式、最小公倍式及輾轉相除法就不是學多項式函數的重點，這部分題材也不在其他國家的綱要中出現；又以三角函數而言，它的重點應是作為週期函數的意涵，學生要知道振幅、週期、幅角的概念。這部分我們較未強調。相對地來說，我們傳統上比較強調在三角恆等式，如和差化積，積化和差的公式。這和其他國家正好相反。又如指對數函數，如 C14 衰變、人口成長等，在其他國家被強調，而我國綱要卻未提及。如由函數表徵現實世界的一貫性精神來看，高中綱要可以增加這方面的說明。
  - (2)機率與統計：我國的機率概念到九年級才被介紹，與其他國家從六年級就開始鋪陳有所不同。而在高中介紹統計時，為求多數學生能了解，刻意迴避較困難的機率理論框架，如隨機變量的觀念。整個機率的介紹應該有所強化，較困難的機率可採選修的方式來設計，讓能力好的學生有機會學。
3. 內容主題的銜接性：
  - (1)7 年級由算術轉代數的歷程太快：我們在 7 年級同時介紹變數、一次函數、一元一

次方程式、二元一次方程式及其圖形，一般國家至少都是以兩年的時間處理，甚至在小學也已做適當的鋪陳。7年級的份量太重，時數顯然不足。

(2)10年級下學期完成整個三角的學習（含直角三角形的角邊關係、一般三角函數角邊關係、廣義角、三角函數），別國都是以兩年到三年的時間完成。

## 二、課程綱要內容之適切性

以下課程綱要適切性的分析是依據跨國比較的結果，我們陳列出綱要中和別國比較不同安排的項目：

### (一)數與量

- 負數：加州在 4 年級時引進負數，而大陸與英國都是在 4~6 年級時引進負數，但避免處理負數乘除；由於我國在七年級時不只引進負數，還引進負指數，份量太重，可以考慮將負數作為相反數的意涵挪到小學處理，但在小學時避免作負數的運算。
- 當量除：新加坡及英國都是小學時除數不出現分數及小數，這可以迴避小學教學上的一些困難，到初中時才用一元一次方程式方法處理，這種方法值得參考。

### (二)代數

- 二元一次方程式：我國 7 年級同時完成一元一次、二元一次方程式的學習；其他國家都分別在 7~8 年級兩年學習。
- 因式分解：我國高中未規範因式分解之多項式的次數，在教學現場常被過度延伸；其他國家除韓國到四次以外，其他都規範到三次以下。這些國家的重點放在平方差與立方差，而且目的在求根與有理式的化簡。
- 多項式的輾轉相除法：多項式的最高公因式、最低公倍式及輾轉相除法的題材，幾乎是我國綱要所獨有；其他各國只有韓國提到最高公因式、最低公倍式。多項式的輾轉相除法可以刪除。
- 代數基本定理：只有我國及美國(加州)提及。如果多項式方程式只限在三次以下，就似乎沒有必要引進代數基本定理，或者採選修方式設計。
- 因式與餘式定理：我國有多項式的因式定理、餘式定理；新加坡有；韓國有餘式定理；其餘國家均沒有。因式定理應侷限在一次因式，以和三次以下的多項式因式分解相呼應。
- 有理式：我國在綱要中似乎看不太出來；加州 8 年級有簡單有理式及有理方程式，10 年級有有理函數；新加坡 11 年級有；韓國 10 年級有；日本 11 年級。我國綱要也應陳列有理式並規範分母的次數。
- 三角比與三角函數：三角比(直角三角形的角邊關係)與三角函數，都在 10 年級下學期完成，其他國家至少以兩年來鋪陳。我國也應分兩段時間來學習。
- 三角恆等式：如積化和差、和差化積公式，在傳統上常常過度操作，學生常不知學習目的；加州綱要有和角公式，是用來證明或簡化三角函數的其他等式；大陸在這一部份只強調兩角差的餘弦公式，並用之推導三角函數的和角、差角、倍角、積化和差及和差化積公式，但不要求記憶；韓國提及和角、差角、倍角及半角公式；日本只提兩倍角公式。因此建議要舉範例說明三角恆等式不要過度操作。
- 對數與三角查表：對數與三角函數的查表僅在我國綱要中出現，雖有提及可用電算器求值，但查表不宜放在綱要。我們建議應該使用科學電算器。

### (三)幾何



### 1. 操作幾何

- 立體展開圖：我們的立體基本展開圖到 8 年級才學；其餘國家在 6 年級左右學到。我們也應如此。

### 2. 推理幾何

- 推理幾何的內容與範圍：我國推理幾何放在 8、9 年級，內容是最多的，大陸次之。大陸在 9 年級時侷限在三角形與平行關係的推理，圓相關的幾何性質是放在 12 年級，屬於選修；加州此方面內容包括證明平行線、四邊形及圓的相關定理，詳細內容規範並不明確。而其他國家的推理幾何則非常簡略。推理幾何的內容如果有擠壓到其他更要緊的數學主題時，似乎可以考慮刪除一些內容，但是推理的脈絡要規範得更明確一點。
- 推理幾何的鋪陳脈絡不夠清楚，大陸在推理證明的鋪陳很嚴謹，值得參考。

### 3. 坐標幾何

- 直角坐標及極坐標的鋪陳：坐標概念及方位的判別(八方位)目前在我國小學並未談及，但這兩項除有生活的實用性外，也是作為 7 年級直角坐標及 10 年級極坐標的鋪陳。加州綱要及新加坡綱要都有在小學作鋪陳。
- 直線的點斜式：我國在 10 年級才做，斜率的概念只是正比關係的比例，可以在國中介紹一次函數圖形時一起介紹。加州綱要在 7 年級即介紹點斜式；新加坡在 9 年級；韓國在 8 年級。
- 圓錐曲線的光學性質：是我國所獨有，其古典幾何的證明有數學的美感，但是會導引圓錐曲線的學習至古典幾何，和原來用坐標幾何處理圓錐曲線的目的不同，這部分宜放在自然科學習。
- 兩圓關係：我國在 9 年級提及，但其他國家只有韓國及日本提及，不屬於核心內容。
- 球面方程式及球面與平面的關係：我國所談的這兩個題材，在韓國僅提到球面方程式，其餘國家則完全沒有提到球面方程式。這個部分可以考慮刪除或放在選修。

## (四) 機率與統計

- 機率概念：我國機率概念在 9 年級引進；加州在 6 年級也有經驗機率；韓國在 6 年級已經介紹；大陸在第一階段(1~3 年級)初步體驗機率的經驗，第二階段(4~6 年級)體驗並求出簡單事件發生的可能性，第三階段(7~9 年級)在具體情境中了解機率的意義並能用列舉法計算簡單事件發生的機率，並能通過實驗，獲得事件發生的頻率，知道可作為事件發生機率的估計值。我國對機率的學習可以適度強化。
- 平均數：我國在 9 年級才引入，並且和四分位數一起談，似乎太快；加州在 5 年級；新加坡在 8 年級；韓國在 5 年級；大陸在第一階段(1~3 年級)；日本在 6 年級。我國也應安排在小學介紹。
- 排列組合：在傳統教學裡頭排列組合常常被過度延伸，因而產生許多難題，但是在這次高中暫行綱要中並未針對這個問題作適當提醒及規範，來防止這種情形繼續發生。
- 遞迴關係：我國有，其他國家中僅大陸有，它是放在最高級的選修課程，這部分可以

定位在二階以下的線性差分方程或刪除。

- 隨機變數：我國並沒有引進隨機變數的觀念；加州大概在 10~11 年級(機率與統計 I)；新加坡在 12 年級；大陸在 12 年級；韓國及日本沒有。我國應該對機率要有一個系統的介紹，不要迴避隨機變數的概念，並且應介紹機率與統計及生活上的結合，如各種抽樣的準確性。
- 貝氏定理：貝氏定理我國有，其他國家均沒有。

#### (五)函數：

- 函數概念的鋪陳：我國從 7 年級介紹變數、一次函數和二元一次方程式，這些內容均在一個年級完成，這樣的安排速度太快，雖然小學也有鋪陳，但是放在次要細目；其他國家均以 2~4 年的時間作鋪陳。
- 函數操作：包括四則運算、合成函數、反函數，我國綱要都沒有具體提到。各國除日本外，都在 11 年級談及這些操作(日本在 12 年級)。函數的操作可以延伸函數在具體世界的應用，我們建議應加入函數的操作及其應用。
- 函數的應用：我國綱要僅在一次函數的引進中，提到一次函數是一種正比關係，二次函數中是正方形邊長與面積的關係，但爾後都沒有再提及函數的應用。加州在代數 II 的指數函數裡，提及用指數函數來解決呈指數成長與衰退的問題，在三角函數則強調振幅、頻率、週期等的物理意涵；大陸在這一方面十分著重，在介紹基本函數時都會以具體實例引入，舉例來說，指數函數的介紹是透過具體實例(如：細胞的分裂，考古中所用的  $C_{14}$  的衰減，藥物在人體內殘留量的變化)，瞭解指數函數模型的實際背景，體會引入有理指數冪的必要性。我國綱要應該增加函數應用的說明。

#### (六)數學分析：

- 微積分的定位：我國高中微積分的定位在多項式的微積分，大陸的微積分定位稍高，含簡單複合函數的連鎖法則及簡單基本函數的微積分。日本是微分含基本函數，但積分則以二次函數為主。新加坡、韓國及加州則是學習較完整的單變數微積分。我國在微積分的學習上定位最低。

### 三、科技工具的使用

在此討論的科技工具是指下列三樣：(1)數字計算器(2)科學與繪圖計算器(3)科技軟體。就文獻分析來看，各個國家的數學綱要中，都一致地提到要使用科技工具或是資訊工具（IT：Information Technology）。但是其實在小學的低年級階段，都沒有明白提到到計算機或計算器在數學的教學或學習中的角色。值得注意的是，資訊科技融入教育是一個整體性質的概念與行動，並不一定只跟數學教育有關。這一點，可以從新加坡、英國和中國大陸的課程綱要之整體理念文本中，明顯看得出來。例如英國的小學生從一開始學習英文就配合著科技工具。

**(一)數字計算器：**各國看來一致地將計算器輔助計算的能力配合心算與估算能力的發展，其中尤以中國大陸、新加坡和英國寫得最明確，而其內涵也都差不多，可以綜合以下三點。第一點，學生要有能力分辨什麼時候值得或是需要使用計算機，什麼時候不需要使用計算機。第二點，學生必須能夠用心算的方式，估計計算機的結果合不合理。第三點，學生必須要有能力根據現有問題，判斷在答案的哪一位做概數。新加坡綱要中舉例說明，如果在每小時幾公里的單位之下談速率，學生應該知道取到小數第五位是非常不合理的。總之，我們可以依據以上的三個觀點，了解概算、估計與計算器在數學學習過程中的地位，以及它們之間的相關性。

順帶一提，日本和新加坡在小學低年級階段沒有提及資訊科技工具，卻提到算盤。其中，日本在課程指導要領裡面，明白指示用算盤來輔助學習基本的加減法。新加坡沒有在課程綱要裡面明白指出要如何使用算盤，但在附錄裡面詳細地介紹算盤操作的演算法。據說新加坡鼓勵老師在教室裡面，將算盤當作一個真實的教學輔助工具。近年來台灣的小學生都花片等課本「附件」來當作學習加減法計算的實物表徵，卻似乎忘了算盤的珠子可能也是一種很有效的實物表徵。

**(二)科學與繪圖計算器：**各國數學綱要最晚也是在初中階段（七年級）開始明顯地引入科學計算器，通常都被用在計算三角函數值、指數、對數和統計資料處理等方面。比較明顯的例外，是日本和新加坡：日本將計算器的地位放得更不明顯一點，而新加坡是將計算器放得更明顯一些。新加坡不但使用計算器，還指明必須是科學型計算器，而且必須要有  $x^y$ 、 $\log x$ 、 $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\sin^{-1} x$ 、 $\cos^{-1} x$  這些功能按鍵。新加坡和英國的國家證照考試標準中，都明訂計算器之需求標準。繪圖計算器較昂貴，在函數學習中是否需要繪圖計算器的協助，還值得研究。

**(三)科技軟體：**檢視被比較的國家或地區的數學課程綱要，我們發現某些國家的課程設計不只是將計算機當作運算的工具，代以處理複雜的數字運算而已，而是將其作為一個教學的對象，或是舉例的對象。當他們想要在數學課程當中舉一個「生活」上的例子，就不只是舉出消費、運動、旅行這一類的例子，而是舉出電腦硬體或軟體的例子。我們認為這樣做非常合理，因為對於許多學生或家長而言，的確電腦已經像電視機和電冰箱一樣，是「生活」的一部份了。特別是對學生而言，電腦網路可能並不被認為是一個「虛擬」世界，而是一個「真實」的世界了。再者，我們也看到他國的數學課程中，包含了

將來更深入學習計算機之操作或理解所需要的基礎知識，例如二進制數字、數位邏輯、操作三維立體設計軟體所需的數位幾何相關知識等等。而在幾何與設計這一方面的著墨，尤以中國大陸和英國最多。

商品個性化的轉變與立體模型設計軟體的發展（例如 AutoCAD、RealWorks 和 3D Studio Max 等），使得某些產業分析師相信，未來產業的創意與設計能力將會越來越重要，這種智能與人力資源的需求量也會越來越高。檢視這些立體模型設計軟體的操作，都是以平面為介面（顯然因為電腦監視器是平面的），因此設計者其實還是透過二維的幾何圖像來設計三維立體模型。熟練而有效率地操作這些 3D 設計軟體的基本能力，包括了立體圖形的剖視圖、斷面圖以及將其旋轉的效果，和所謂的三視圖以及展開圖。而操作的過程，基本上就是圖形之平移、旋轉、翻轉、縮放這些動作。我們看到英國和中國大陸的初高中幾何課程當中，除了保留部分平面幾何證明與作圖的基礎教育之外，增加了相當大量的上述教材。這也是將資訊科技工具不止視為數學教育之工具，也視為數學教育之目的的一個例子。

現在在大學裡頭，理工科系需要使用數學軟體，如 Matlab、Mathematica 及 Maple，做符號及數值運算，十分普遍，這部分的奠基訓練在高中時也應被注意。

#### 四、時數分配的恰當性

關於各國整體的課程規劃，我們已經在第四章，跨國比較裡面完整地描述。對於其課程架構與學制彈性的探討，我們也已經在前一節論述過，而此節要探討整體課時分配的問題。各國數學授課時數的對照表請參見附錄七。

根據附錄七，我們可以明顯地發現，在所有比較的國家當中，台灣數學課的授課總時數，以及相對於整體課程而言，數學課授課的課時比例都是偏低的。但是我們要提醒讀者兩件事情。第一，根據報導，日本這一波教改是走輕鬆與快樂學習的路線，並配合其一週上課五天的政策改變；有一種說法指出，日本的授課時數縮減了百分之二十五、授課內容縮減了百分之三十。即使如此，日本學童在小學階段的數學課的總時數與課時比例皆不比台灣少。而日本的高中階段，幾乎完全採用學分選修制，所以課程時數上的差異很大。但我們從前一節得知，日本在高中階段所提供的選修課程比台灣豐富許多，他們總共開設六個學年的課程，其中只有一個學年是必修課、五個學年是選修課。相對於我們課程的安排：兩個學年的必修課與一個學年的選修課，顯然還是豐富得多。因此，我們可以假設平均而言日本的高中生接受的數學課程時數會比台灣的高中生多。

第二，韓國在帳面上的數學授課時數還有彈性成長的可能。韓國的課程規劃中有保留若干節數的彈性授課時間，這些時間不正式安排課程，在高中階段也不納入學分計算。他們實施的規則是，如果一門學科原先每週有三節以上的授課時數，即有資格使用一節彈性授課時數。由於韓國各階段的數學課都超過這個門檻，因此我們合理地猜想，數學課是可以使用一節彈性授課時數的科目。如果韓國的數學課程每週有多一節的彈性時數（就像我國的輔導課或「第九節」），則小學、初中和高中分別每年多出 24 小時、27 小時及 30 個小時的數學授課時數。韓國初三的數學課授課時數較少，這或許是由於他們有選修課程的安排，而選修課程是由地方教育單位制定，因此不易調查。

英國、新加坡和美國加州數學課的課時都非常多，他們的學生每天都有數學課。他們的教育理念認為：數學就像英文，是一種基礎語言，而語言的學習要領就是要「天天用」。而小學階段的數學課比例更高於初中階段，這個現象也反應了他們的基礎教育教育理念：最重要的就是培養讀、寫、算的基本能力，因為他們認為這是影響學生將來學習發展最主要的關鍵。英國以兩個關鍵字來表達此理念：Literacy 和 Numeracy。新加坡數學課的授課時數雖然略少於加州與英國，但是對照其課程內容，比起加州和英國來得深一點，而眾所皆知新加坡學生的數學基礎能力和信心都遠超過加州和英國。這或許可以有兩種解釋：若非新加坡的教師素質較高、教材與教法都比較有效率，就是新加坡的分級制度實施得宜——他們在小四結束後分級，將數學課程分成兩種等級的綱要來教導學生，而較慢等級的學習內容幾乎等於是小四以前的內容。

現階段的實務上，數學科在小學需要 3, 3, 4, 4, 5, 5 的課時，國中需要 5, 5, 5 的課時，教育部任由各校老師自行去搶時數是不負責任的。

## 五、課程架構與學制彈性

我國現行的學制是以九年一貫的中小學課程，接續三年的高中、又稱為後期中等教育。而我國六三制的九年一貫課程與其他國家或地區的六三或五四制中小學課程之用意差不多一樣，就是要培育全國國民都應該學習的基礎知識，所以基本上全都是必修，而且提供全國或全區一致的課程和評量標準。與我國學制差異較大的是英國和新加坡。英國的中學共五年，分為第三（7—9 年級）和第四階段（10—11 年級）。第四階段結束後參加 GCSE 中等教育證照考試，憑此成績申請中六（12—13 年級）或其他形式的大學預科教育，準備參加二至四科的 A-level 或 AS-level 考試，再據以申請大學。所以進入大學時相當我國大二，因此我們看到 A-level 之數學科考試標準接近我國大一微積分，也就不必太過驚訝。至於新加坡大體上與英國類似，只是他們讓能力在前半段的學生參加特別或快捷課程，在相當於中四時學完英國的中學課程而參加 GCSE 考試，因此也就可以提早一年完成 A-level 課程的準備。

在整個課程的設計上面，台灣、中國大陸、日本和南韓都比較傾向於『百科全書式』的理念，也就是將學術、藝能、體育等全部均勻地涵括在中小學課程之內。例如我國將整個課程分成七大領域，大體上平均地分配授課時數。相對地，英國、加州和新加坡則比較傾向於『核心知識與能力』的培育（例如英國從 2002 年才開始有《公民》課）。所謂核心通常是指語文和數學，而小學階段的數學，大體上都強調算術、測量、形體等基礎知識；此外，加州和英國又更顯著地強調合理的精熟程度。

我國 95 年高中暫行綱要的實施方式，是在 12 年級（即高三）開始，以選修方式讓學生開始分流。可以這麼說，台灣的課程設計中，所有在學學生必須學習一致基礎課程的年限是 11 年，亦即 1—11 年級。在這一方面，新加坡是 8 年，加州是 9 年，中國大陸、日本和南韓是 10 年。英國最近也改成是 11 年。

我們所比較的國家，都在高中時期提供豐富的選修課程讓學生開始決定自己的發展方向。就選修課程的多寡來看，我國數學領域僅在 12 年級提供兩門一學期的選修課。韓國在高二、高三的課程中，提供兩個一學年的選修課和三個一學期的選修課；韓國另外替不以升學為志的學生，開設一學年的選修數學課，以數學欣賞與計算機的應用為主題。日本提供了三個一學年的數學主軸課程（I、II、III），其中數學 I 是高一的必修課，另外又提供三門一學年的選修課程（A、B、C），沒有前後順序的要求，可以和數學 I 一起修。如此總共有六個一學年的課程，學得最多的學生每年可以選擇兩門課程，每週七節數學課。中國大陸完全以學分制代替高中的分流，高中畢業的最低標準是十個學分的數學課，想要考進大學之文法商學系的中學生建議選修 14 到 18 學分，而想要考進理工學系的中學生建議選修 16 到 20 學分，最喜歡數學的學生可以修到 24 學分。

英國、美國加州和新加坡早就在他們的後期中等教育裡提供大量的選修課程。其中以準備進入大學的學術性課程，在新加坡與英國稱為 A-level，在美國稱為 AP (Advanced Placement)。AP 的數學課程以數學主題開課，例如：代數、幾何、數理統計和微積分預備課程 (precalculus) 等。A-level 科目並不繁多，以較基礎的科目為主，例如數學、物理、化學、生物或幾種主要的語文。因為考好兩科就能入學，所以大多數學生只選兩、三科學習與考試。可見這三個國家或地區的後期中等教育不但也是以選修來行分級分流

之實，也鼓勵學生確定方向，集中注意力於少數專業科目。

在能力編班方面，我國強調絕對不可以。但是其他國家在綱要或實施建議中，或明顯或含蓄地提及能力分組的教學方式。新加坡是最明顯的，他們在小四考試，從小五開始將學生區分成三種能力實施分組教學。其中第一、二組（約佔學生總數之一半）共用一樣的課程綱要，可能在實施的深度上由現場教師決定其不同；第三組（另一半）則使用另一種課程綱要，大約可以說是再回頭將小四以前學得不夠紮實的知識和能力補救起來。英國跟美國加州提供一套制度，讓有能力的學生有跳級的機會，而對於特別落後的學生也有以社會關懷為精神的資源班。在韓國和中國大陸的課程綱要中，皆提到適當能力分組的可能性，也說如果情況許可，能夠實施所謂的『跑班制』。

美國的跑班制是自初中(6~8年級)開始，每一學生有一歸屬班(home class)，但某些科目(通常是數學)設有加速軌道，學生可經由檢定考試選擇進入該科目的加速軌道。若在加速軌道中學習落後，則可以回正常軌道。同一科目的時段設計為一致，學生以跑班方式在該學科的時段，進不同軌道。隨著年級增加，選修科目增多，跑班情況更趨普遍化。加速軌道主要是針對該科學習能力強的學生，提供加速學習的機會，它仍是同樣的內容，並非加深加廣，或多做刁鑽挑戰題。我們可以自高中開始設計分級跑班制，以班群為單位，提供加速軌道，學生在同一班群裡，針對個別科目，可以選擇走不同的軌道。班群只是因應台灣高中規模較大的權宜設計，班群的大小應隨學校規模、學生程度、教室地理位置等，因地制宜。如果實施12年義務教育，我們建議可以學習美國的5-3-4制，一方面是配合學生的生理年齡的安排，另一方面跑班制可以較早實施。

## 六、實施方法的問題

1. 課綱調整應作充分之研究，廣泛的諮詢，92 綱要與 95 暫綱的規劃期都太短，很難做得周全。
2. 課綱的推動需要漸近，最好是幾冊的課本都編好了，實驗好了，再行推動，以免造成老師、家長過分擔心，造成學生太大壓力。
3. 教育部應設計一套評量制度以及補救制度，當學生學習落後時能及時發現，及時補救。
4. 國中高中的學力測驗制度要重新檢討：目前學力測驗的題數不多，考試時間不長，信度與效度都有問題，但卻被用來作為分發的依據。
5. 國中小的數學科課時不足問題要趕快解決。



## 陸、其他科/領域之統整性

5月28、29日進行跨學科、領域之檢視，與各科目的綱要評估者會談之後，以下紀錄與數學領域相關之對話：

### 一、國文

國文科乃是以能力指標描述其課程綱要，難以確定其學習內容與範圍。會中論及，也許值得考慮以「附表」方式，列出低年級學生至少該學會的國字。有人說一千字，有人說六千字。其實中國字獨立認識並無太多意義，應該要學會的，除了字以外，還有詞。這是國文科的問題，不便越俎代庖。但是，從討論中省思，至少在低年級階段，實在難以分辨國語和數學兩科的「基礎語言教育」角色。例如瞭解並且能說出像以下的句子：

- 哥哥吃了三顆糖，弟弟吃了六顆，誰吃的比較多？
- 哥哥吃了三顆糖，弟弟吃了六顆，哥哥和弟弟一共吃了幾顆糖？
- 一支冰棒 25 元，小明有 20 元，能不能買得起一支冰棒？
- 向前走到第三個十字路口，右轉再走 50 公尺就到了。

究竟屬於國語教育？還是數學教育？數學綱要寫著「數學是一種語言」，此處或許是一個字面的 (literally) 解釋。我們認為，至少在小學低年級階段，數學課也兼負了國語文教育的責任。許多日常生活中使用的基本數學詞彙之聽說讀寫與瞭解其意義的教育，學童是在數學課學習的，而非國文課。

所以，如果國文綱要將以「附表」方式訂定小學生該學會的字（和詞），我們建議應該納入基本數學詞彙。也就是說，至少在剛入學的低年級階段，應該由國文和數學兩科從生活情境中共同訂定基本字詞。

至於小學高年級以後的數學學習與國語文能力的關係，特別是從文字應用題列代數式、計算排列組合，或者得到統計推論的情況，雖然顯然和語文能力關係密切，但是已經難以釐清。或許在第二階段以後，數學科應該發展自己的符號、語言和邏輯，而不倚賴於國文教育了。

國文科並提到像「八『尺』之軀」和「半『斤』八『兩』」這些成語中的單位量換算問題。目前的數學綱要並無古代單位。但是只要國文課自行定義換算比，學生應可運用簡單的乘除換算成今日單位。但是在幾年級需要？沒有明確規劃。

### 二、地理

整個社會領域（地理、歷史、公民）在初中階段（7—9 年級）將會規定「基本內容」，但 6 月 26 日才會公告新案，並於 95 學年開始實施。因此，大致而言，此番課程綱要檢討的價值受到影響，因為檢討的對象可能很快就要被更替了。

在高中階段，自然領域（物理、化學、生物、地科）已經爭取到高二開始分流或選修，但是社會領域卻仍然從高三開始分流或分級選修。這樣導致單方面減輕負擔的不公平現象。與會之自然科學及數學學者，咸望社會領域共商大計，也從高二開始施行選修。如此並不會流失過多社會科課時，只是以分級程度的社會學科取代一致要求的課程而已。

希望數學課事先教導

- ✧ 前後左右。沒問題，數學課安排在一年級。
- ✧ 東西南北。沒有。但是將建議數學綱要適當地教導四方位，然後八方位（新加坡有此項目），並作為極坐標的前置經驗。
- ✧ 四年級談到「平方公里」。數學課程安排在五年級。兩種建議：(1) 地理課延後講平方公里。(2) 數學課其實已經在三、四年級教導了面積概念，並建立平方公分和平方公尺之量感。何不到此為止，將較大尺度的公里單位交由地理課介紹，並應用數學課已經教導的面積概念，瞭解平方公里之概念，並在地理尺度建立平方公里的量感。跨國比較發現他國之數學內容並無平方公里。
- ✧ 五、六年級就需要坐標，經緯度或地圖標示。數學課程在 7 年級才講平面坐標。宜建議提前，應與綱要制訂者商談。但是他國雖然頗為普遍在小學階段講數線，卻不見得會講平面坐標，更何況數學沒有講球面上的經緯度。或許可以反過來利用地理課的地圖閱讀經驗，介紹平面坐標系統。

反過來，數學課對於地理課的需求，在於如果我們選擇在高中階段適當地介紹數學歷史，則可能談到一些外國地區，如果學生已經學習過，效果當然會更好。包括：

- ✓ 愛琴海、希臘城邦的分佈、雅典
- ✓ 埃及、亞歷山卓
- ✓ 西西里島
- ✓ 法國、德國、英國

### 三、歷史

歷史科沒有對於數學的要求。反過來，我們建議歷史科的課程設計能夠兼顧「知識」發展史之梗概。數學科對於地理課的需求，在於如果我們選擇在高中階段適當地介紹數學歷史，則必定會講起過去的人事物，如果學生已經在歷史課知道了那個時代背景，效果當然會更好。包括：

- ✓ 西元前 500 年至西元 250 年時期的希臘、與非尼基人的戰爭
- ✓ 哥白尼、刻卜勒、伽利略和當時的天主教廷
- ✓ 笛卡耳在哲學與思想上的地位
- ✓ 拿破崙時期的法國與德國關係
- ✓ 中國的南北朝時代，北方諸國的位置和時期
- ✓ 英國的光榮革命之前，與對應大約同時期的明末清初歷史，和台灣的荷蘭與鄭氏時期

### 四、公民

對於 7-3-3 需要的數學先備知識 N-3-14 並不恰當，針對公民 7-3-3 指標，只要長度單位就夠了。其他對於數學的需求也大多類似此項：是不必要的，而這種錯誤乃是來自於數學能力指標的誤解。建議學者閱讀分年細目及其範例，就會比能力指標更清楚。

整體而言，公民課程之能力指標都廣泛而高深得匪夷所思，與會者咸認為應該全面檢討。例如在五、六年級要求知道「投資是一種有風險的行為」還有「政府有時候會因為非經濟因素而干預經濟」。至於公民科將要如何檢討其綱要，我們不便置喙。

## 五、物理

需要數學配合的課題如下。

- ◇ 高一就要平面坐標和向量。直角坐標系在 10 年級上學期就介紹，但是向量一般國家都在 11 年級才講。我們考慮在 10 年級講直線參數式，具有平面向量之先備知識。但向量本身，按數學結構，還是應該放在高二較為適當。物理科同意自己教向量入門。
- ◇ 高一一開始就要三角比。數學科研議提前至初中的可能。如果不行也可研議盡量在高中階段提早，將三角比及三角函數分兩階段教學，而複數和多項式的運算則移至高二。
- ◇ 高一需要指數與對數概念和符號，不必函數概念。數學科安排在高一下，可研議稍微提前。但物理科需要以  $e$  為底的指數與對數，數學科難以遵從。其實在高中時代以 10 為底描述指數變化現象，與其他底數有何差別？
- ◇ 高二要用到反三角，但只是符號，不需計算。數學課可以研議，例如英國新加坡直接就著計算器的按鍵來教學，概念之引入則是從邊長比值倒求夾角，看來也不算抽象。
- ◇ 圓周運動。需要知道在切點處圓之切線垂直於圓心連線。可，初中就教了。數學科擬建議在圓的幾何性質方面，只留下前述關係和三點決定一圓，其餘省略。也省略球的方程式與幾何性質。
- ◇ 向量外積。物理可以不必講行列式計算法，故由物理課自行講解，數學課可以不講外積。
- ◇ 高二需要極限觀念，用來講解導數意義。其實就是需要初步的微分學了。數學課可能必須延到高三才能開始。但是日本與新加坡的確從高二開始初步的微積分，可參考。

反過來，物理課程可以用來協助數學概念發展的課題如下。

- ✓ 物理課會先講向量，數學課接著發展更具有結構性的概念和演算。
- ✓ 物理課先以實驗示範橢圓和拋物面的光學性質，數學課後發展。
- ✓ 物理課先講圓周運動，數學課可以用來導出廣義角的三角函數，以及圓的參數式。
- ✓ 物理課先講解波的疊和，數學課可以跟著將三角函數的計算公式與技術。
- ✓ 數學課只講「重量」，由物理課自行解釋它是「質量」。英國課綱也說明了這一點： $\text{Kg}$  是質量單位，但是日常生活中用此單位表示重量。
- ✓ 在所有引伸量中，數學只講速率，其他如密度、濃度等，皆由物理或化學自行發展。

數學既然自許為核心科目，便應該為其他學科提供足夠的數量形概念，與技術性的計算、描述或推理之工具。但是數學的教與學仍然有其一貫的邏輯和信念，就算不能每一步驟的嚴格推論，也要能夠提出足以令人信服的證據或類比，使學生能夠自信地應用所有數學知能，而不至於以為數學也是因對象而置宜的經驗學科。因此，數學雖有心為其他學科服務，但也不能犧牲數學本身的邏輯結構和教學信念，以避免成為工具的堆積而喪失概念上的一致性。準此，我們呼籲自然科學領域的課程設計同仁，重視數學能力的發展歷程。或許這個歷程反應了一般人的認知發展歷程。在數學課題尚未備妥以前，教導需要較抽象數學概念才能理解的科學知識，或許是事倍功半的作法。

## 六、化學

需要數學配合的課題如下。

- ◇ 希望高一就能使用如  $10^{23}$  這種指數或科學命數。數學課安排在高一下學期，希望還能稍微提前。還有相關的指數計算規律與對數計算規律，最好能夠具備。應可建議數學課程安排得更細緻一點，提供這項服務。

## 七、地球科學

- 首先是一個無關於地科與數學的協調問題：傅學海教授質疑小學二年級開始教分數，太早。而檢閱跨國比較表格，似乎的確比他國稍早。值得數學綱要設計者參考。
- ◇ 閏年。沒有。也許出現在應用題中，但是沒有正式在課綱中提出。或許該要在數學課定義閏年規則，而在地科課說明原因。但是放在哪裡才合適？需要再研究。地科（自然領域）在五、六年級要講閏年。
  - ◇ 降雨「機率」。數學課程的確對於「機率」的教育不夠而且太晚，目前幾乎集中在 9 年級和 12 年級。將建議考慮在初中時期早些提出機率概念，並在 10 年級準備好其他科目共同需要的數學工具，包括基礎的機率與統計。但是數學課只應負責教導「機率」本身的概念，地球科學課程應負責說明何謂「降雨機率」。社會上有種種誤解，例如以為 90% 之降雨機率的意思是全天有 90% 的時間會下雨，這種誤解並非來自於機率概念的錯誤，而是不清楚氣象報告對於降雨機率的定義。
  - ◇ 需要將緯度做三角比計算。只要在 10 年級下學期以後就可以了。但我們也同時在研議，是否可能將三角比挪到初中階段（需再度壓縮初中時期的推理幾何內容），或者是 10 年級上學期。

## 八、生物或生命科學

需要數學配合的課題如下。

- ◇ 初中階段談遺傳的機率問題。技術上只要計算  $1/2$  的整次方。但概念上可能有較複雜的排列組合問題。數學課要在高二才講。即使提前，也只能在高一。所以建議生物科在初中階段明確宣告「不可涉及排列組合問題」。
- ◇ 高三時期需要處理數據。數學課在高二安排的機率與統計（現在建議提前到高一）應該足敷使用。

## 柒、結論與建議

### 一、整體建議

#### 確立語文與數學為中小學教育的核心科目，並訂出最低授課時數：

聯合國教科文組織出版的報告書《Learning: The Treasure Within》指出在資訊爆炸與知識經濟的時代，未來的學習型態是『終身學習』；學校教育應該提供結實的核心知識與技能，作為支持終身學習的共同基礎；在中小學階段，此所謂共同基礎的核心知識與能力，咸認為是語文（包括本國語言和現代外語）、數學和資訊工具。數學是科學的語言，亦是理性思維的基礎。數學抽象思維的建立有賴於學校教育的輔導，自學或晚學均格外辛苦。準此，我們建議應將語文與數學訂為中小學教育的核心科目，並訂定最低授課時數。目前中小學語文與數學之課時均不足，我們建議可仿照美國(加州)、英國與新加坡，在 1~9 年級數學教學節數改為每天一節。

#### 數學課程綱要應把握她作為核心科目的角色：

數學是科學的語言，原本在基礎教育中便是核心科目；而近半世紀計算機的快速發展，已使所有經驗科學的學門在進行數量化的革命，也使傳統的科學與工程學門都邁向數學深化的潮流，這更凸顯了數學在未來科學發展的核心地位。為因應各學科發展的新趨勢，並把握數學的共通性與核心性，數學科在教材安排上，要注重效率，在 12 年課程中抓住幾個主軸課題一貫性地鋪陳與發展，避免數學逐漸變成技巧的堆積。目前課程綱要還可以作些微調，注意數學與其他學科的結合並增加一些數學建模的題材，以彰顯重要的主題；刪除部分內容或作適當規範，以導正過去因考試所造成太多人為技巧化的難題，而詆損學習效率。有關十二年一貫課綱設計的看法見下一節，相關綱要調整之建議見其附表。

#### 設置常設委員會定期評估課程結構及相關實施問題：

長期監控數學教育實施狀況與問題、進行跨國比較、綱要一貫性與銜接性之分析、研究各級招生相關問題及師資培育問題，並提出前瞻性建議，以作為數學科教育政策制訂之依據。此常設委員會可設在科學教育指導委員會之下。

#### 建議廣泛實施選修制度：

1. 建議自高中起應將學校教育導向為以學生為本位的學習模式：學校應提供不同程度的課程、不同速度的學程供學生選修；學生可選擇適才適性的學習方式。教育單位也應大幅開放高中生到大學選修課程之管道，讓有能力學習的學生有機會往上學。針對學習落後的學生，在中小學階段，各學區也可在暑期辦理數學科輔導班，協助學生回到正常學習軌道；在高中職階段，則可規劃程度合適的數學補救課程，提供學生選修。這些措施，可以有效落實政府的社會關懷政策。
2. 建議自高二起，以選修代替分流：研究各國學制，其共同課程最多是到十年級(例如：新加坡到八年級，美國(加州)到九年級，大陸、日本及韓國則到十年級)，以後則以選修課程為主，提供學生適才適性且有效率、有彈性的學習。我們建議高一數學 I、II 為必修，自高二起，數學改為選修。我們並建議設計下列核心選修課：數學 III、IV (微積分預備課程)、數學 V(機率與統計 II、線性代數)、數學 VI(簡易微積分)。數學 VI 可以到大學選修微積分課程來替代。數學 I~VI 的學分數均為四學分。因應選修課的設計，大學入學方

式應有相關配套措施。

### **訂定高中起使用科技工具的政策：**

透過科學計算器的使用，除可增進學習效率外，若配合數學建模之學習，也可促進數學與科學的整合，並改善目前數學學習與現實世界脫鉤的現象。

## **二、對十二年一貫課程架構的一些看法**

92 綱要原訂五個主題，貫穿九年義務教育之數學課程，但並未考慮高中課程之連貫。此時為審視 12 年一貫之數學課程規劃，並兼顧跨國比較所需之並列描述，有必要以更宏觀的視野，重新擬定學習主題與內容架構。

我們在研究過後，基本上維持九年一貫原訂之前四項內容主題，但認為第五個主題「連結」算是能力的一種，故將其放在能力主軸中，而在內容主題的部分則配合高中的綱要多增加兩項內容主題：「函數」及「數學分析」，其中「函數」是呈現樣式規律及量與量關係的重要觀念，應由小學開始適當鋪陳，並在高中正式學習。另外在能力主軸中，除了演算、抽象化、推理、連結、解題及溝通能力以外，為因應資訊科技融入教學，亦增加了「使用科技工具的能力」。

今比較各國的狀況，數學必修大致到十年級為止，而我國的數學必修則是到十一年級，造成許多文法商學生學習一些不必要的數學。若要減輕學生的負擔，可以再檢討哪些是最核心的題材。準此，我們也對現行高一高二的題材做了適當的調整。現分述如下：

### **(一)內容主題：數與量、代數、幾何、機率與統計、函數、數學分析**

#### **1. 數與量**

人類透過「計數與測量」來量化客觀世界；發明抽象符號「數」來記錄計數與測量的結果；透過數據的分析並建立數學模型來表徵客觀世界、認識現實世界。數學教育便是教學生學習人類這項文明進化的經驗。

在小學階段，學生學習測量日常生活常用的基本量，包括時間、長度、角度、面積、體積、質量、容積等。在中學階段，在物質科學領域裡，學生學習速度、密度、濃度等引申的量；在社會科學領域裡，學生學習人口、生產成本等經濟的量；在生命科學領域裡，則有族群數等量。我們所度量的客觀世界，由生活的周遭發展到微小的奈米世界以及廣闊的天文世界。

在數學裡，我們常將測量的物件分類成離散量與連續量。自然數是表徵離散量的符號；十進位記數法是人類記錄自然數的通用方法。連續量的測量是透過一單位量作間接比較，這是引進「分」的概念的一個動機。「分數」是記錄「分」的結果的符號。十進位記數法也可以延伸為小數來表徵分數。

好的量感是一個人的重要資產。量感的培養在小學階段十分重要。學生應經過實測、步測、目測等方式建立公分、公尺、公里等單位長度的感覺。並可經由目測進行日常生活所常見長度的估測。同樣的，時間、角度、面積、體積、容積、重量、速度、頻率等，也應有相類似之量感的訓練。

好的數感亦是一個人的重要資產，這包括位值轉換的能力與數的估算的能力。位值轉換能力的培養應結合不同單位的量感的培養，如感受一平方公尺與十平方公尺、一百

平方公尺大小的差別。估算的訓練包括求取概數(有效位數的掌握)、個位數的心算等訓練。估算的能力使人能以最快的方式估計答案的合理性。

數與量主題的四個重點為：

- (1) 計數
- (2) 測量
- (3) 數的運算
- (4) 立算術式、解算術題

此部分的說明已在 92 年綱要中詳述。

## 2. 代數

代數是以文字、符號、函數等抽象的方式處理量與量的關係，代數也建立方程式(如代數方程式、不等式)、抽象體系(如數系、向量空間)等數學模型來了解現實世界，從而解決現實世界的問題。小學的算術問題到中學時經由代數的處理，變得十分簡單，這顯示了抽象化的威力。高中所學的坐標幾何以代數方法處理平面幾何的問題，十分有效率、有系統；代數的學習亦要掌握具體實例，以堅實學生抽象化的基礎，避免流於形式。以下是我們認為代數主題的三個重點：

- (1) 能以文字、符號處理數及其運算：

學習順序的建議：

乘法公式	8 年級
簡單多項式及多項式乘除	8~9 年級
二次多項式之因式分解	8~9 年級
簡單分式	8~9 年級
多項式(含三次以下因式分解)	10 年級
分式(含部分分式)	10 年級

乘法公式應以面積導引學生學習。多項式因式分解應作為分式化簡的先備技能。作為基礎教育，不需要談最高公因式及最小公倍式。

- (2) 建立方程式或不等式等數學模型，並發展各種方程式化簡及求解技巧，以解決現實世界的問題。方程式的解法有下列技巧：

- a. 化簡的技巧：同項合併、展開法、提公因式法、化為標準式(如配方法)等
- b. 求解的代數方法：移項法則、代入法、消去法
- c. 求解的分析方法：勘根定理及牛頓迭代法等。

方程式學習順序的建議：

一元一次方程式	6~7 年級
一元一次不等式	7~8 年級
二元一次聯立方程式	7~8 年級
一元二次方程式	8~9 年級
簡單分式方程式(分母為一次)	8~9 年級
一元二次不等式	10 年級

多項式方程式及不等式（三次以下）	10 年級
三元一次聯立方程式	11~12 年級
二元一次聯立不等式	11~12 年級

- (3) 建立抽象體系或模型（數系、向量空間），並研究其結構，以表徵現實世界。數學模型與抽象體系的學習，要注意與現實世界結合，這樣才不會失去抽象化的目的。而學習了抽象體系的多方面的應用，才會體驗到數學的普遍性與本質性。

學習順序的建議：

數系（整數、有理數及實數）	10 年級
複數系（多項式方程式的根）	11 年級
二維向量空間（內積、直線）	11 年級
三維向量空間（內積、外積、平面）	11 年級
線性代數（含二元二次式標準化）	11~12 年級

### 3. 幾何

幾何課程的目的是認識空間與形體，並加以量化。幾何的基本形體有三角形、矩形、圓形、長方體、球體等，基本形體的構成要素為邊、角、面等。幾何量有長度、角度、面積、體積。幾何性質有：垂直、平行、全等、相似、對稱，以及基本形體（三角形、四邊形、圓形）的個別性質。

綜合 92 綱要與 95 暫綱，幾何課程可概分為操作幾何（1~8 年級）、推理幾何（9 年級）、坐標幾何（10~11 年級）。

- (1) 操作幾何：是指分割、拼合、裁補、變形變換（平移、伸縮、旋轉、鏡射），以及立體模型的展開、組合及等，操作方法有繪圖、剪紙、摺疊及電腦繪圖。在操作過程中，培養學生空間想像的能力、掌握在操作過程中幾何量的變化、以及非形式之推理。
- (2) 推理幾何：這部分是以幾何圖形為媒介，提供形式推理的訓練。我們節錄一些大陸綱要的作法於下：
- a. 了解證明的含義：
    - (a) 理解證明的必要性。
    - (b) 通過具體的例子，了解定義、命題、定理的含義，會區分命題的條件（假設）和結論。
    - (c) 結合具體例子，了解逆命題的概念，能識別兩個互逆命題，並知道原命題成立其逆命題不一定成立。
    - (d) 通過具體的例子理解反例的作用，知道利用反例可以說明一個命題是錯誤的。
    - (e) 通過實例，體會反證法的含義。
    - (f) 掌握用綜合法證明的格式，體會證明的過程要步步有據。
  - b. 掌握以下基本事實，作為證明的依據：
    - (a) 一條直線截兩條平行直線所得的同位角相等。
    - (b) 兩條直線被第三條直線所截，若同位角相等，那麼這兩條直線平行。
    - (c) 若兩個三角形的兩邊及其夾角（或兩角及其夾邊，或三邊）分別相等，則這兩



個三角形全等。

(d) 全等三角形的對應邊、對應角分別相等。

c. 利用 b. 中的基本事實證明下列命題：

(a) 平行線的性質定理（內錯角相等、同旁內角互補）和判定定理（內錯角相等或同旁內角互補，則兩直線平行）。

(b) 三角形的內角和定理及推論（三角形的外角等於不相鄰的兩內角的和，三角形的外角大於任何一個和它不相鄰的內角）。

(c) 直角三角形全等的判定定理。

(d) 垂直平分線性質定理及逆定理；三角形的三邊的垂直平分線交於一點（外心）。

(e) 三角形中線定理：三角形三中線交於一點（重心）。

(f) 等腰三角形、等邊三角形、直角三角形的性質和判定定理。

(g) 平行線截比例線段性質及判定定理。

d. 通過對歐幾里得《原本》的介紹，感受幾何的演繹體系對數學發展和人類文明的價值。

(3) 坐標幾何：建立平面及空間的坐標系，以方程式表徵平面及空間中基本的幾何圖形，並進行推理與相關幾何量的計算。幾何的學習可與其他學科相呼應，比如物理科的拋物運動。

a. 平面上的基本幾何圖形為直線、三角形、圓與圓錐曲線。學生要學會直線、圓及圓錐曲線的代數表徵方式，其中圓錐曲線侷限在標準式，深入的二次曲線的學習放在線性代數，作為選修。

b. 三角形的學習內容為直角三角形的角邊關係及一般三角形的角邊關係，即正弦、餘弦定理。

c. 極坐標是以觀測者為中心，標示平面位置的自然方式，也是表現圓的有效方式，而圓則是幾何與物理的基本要素。

d. 平面上的線性變換(平移、伸縮、旋轉、鏡射)是操作幾何及坐標幾何的重要內涵，可將幾何問題標準化。

e. 坐標幾何學習順序的建議：

坐標圖與方位圖(數對的描點及八方位的認識)	5~6 年級
直角坐標系	7 年級
線性函數圖形	7 年級
直線初步(含點斜式)	8 年級
勾股定理及距離公式	8 年級
直角三角形角邊關係(三角比)	9~10 年級
一般三角形的角邊關係(含正弦餘弦定律、面積公式、三角測量)	10 年級
直線(含參數式)	10 年級
圓(含標準式及參數式)與極坐標(含坐標轉換)	10 年級
圓錐曲線(標準式)	11 年級
平面向量、內積和角度	11 年級

空間中的直線與平面(法線式)	11~12 年級
平面線性變換及二次式標準化	12 年級

#### 4. 機率統計

生活上的機率語彙會出現，如樂透中獎的機率、下雨機率等等，學科裡如遺傳學、經濟學、物質科學都需要很多機率的觀念。又，在物質科學、生命科學、社會科學都有許多情境均可以量化，統計提供一套思想與方法，讓我們能讀出背後的數學規律。由於資料中常有雜訊或由於我們只採少許統計樣本，因此也需要機率的思想，提供我們統計量的機率意涵。

簡單的離散機率（古典機率）為許多學科的共同需求，應安排在 9~10 年級完成。所需要的排列組合也應在 10 年級學習，但內容不宜太深。

簡單機率	9 年級
統計概念（平均數、四分位數）	9 年級
簡易排列組合含計數原理(加法、乘法、排容)、排列(直線、不盡相異物、重複)、組合、二項式定理	10 年級
機率 I（樣本空間、事件、集合、機率的性質、數學期望值）	10 年級
統計 I（抽樣調查、標準差、信賴區間、信心水準）	10 年級
機率 II（獨立事件、條件機率、貝氏定理、隨機變數、數學期望值、變異數、二項分配）	12 年級
統計 II（交叉分析、分析二維數據）	12 年級

#### 5. 函數

數學探索樣式的規律性，簡單的規律性常以數列的方式呈現，而一般兩量的關係常以函數方式表徵。

##### (1) 數列：

- 數列視為一種離散型函數，舉例來說：表徵離散的時間序列，逼近未知的物件（極限），密碼或編碼序列等。
- 等比數列是作為指數學習的先備經驗，而一般級數及數學歸納法則是作為學習分析的先備經驗。
- 數列學習順序的建議：

數列樣式的規律性	5~6 年級
等差數列與級數	8~9 年級
等比數列	10 年級
指數、對數	10 年級
等比級數及無窮等比級數	11 年級
數學歸納法	11 年級

(2) 函數：以抽象方式表徵量與量的關係，並以關係、數列、公式、函數等方式呈現；  
函數是表徵兩量關係的基本語言。

a. 函數概念的建立需要較長的時間鋪陳，一種可能的鋪陳步驟為：

- 觀察樣式規律性
- 列表記錄測量所得之兩量，這是建立自變量與應變量的前置經驗。
- 以繪圖方式呈現兩量關係的規律性
- 未知量的推測
- 公式與函數模型的建立
- 以方程式呈現兩量關係

b. 基本函數的學習，應掌握函數作為表徵現實世界中量與量的關係的根本動機：

- 線性函數是表徵兩量成正比的關係
- 二次函數是用來表徵長度與面積、落體運動中時間與距離的關係
- 有理函數可以用來表徵反比現象，如重力與距離的關係。
- 指數函數可用來表徵細胞分裂、考古中所用的碳-14 的衰減、藥物在人體內殘留量的變化等。
- 對數函數可以用來表徵量的等級（地震強度、星星亮度）與簡化運算
- 三角函數可以用來表徵聲波、光波的現象。

c. 基本函數可透過簡單的變數變換，將一般基本函數化為標準式。比如二次函數可經過平移消去一次項(配方法)。

d. 函數的操作包括四則運算、合成、反函數等。由此可延伸出多樣的函數來表徵具體世界。這部分之學習應落實到具體之應用，避免流於形式。

e. 函數圖形的繪製是培養學生「關係感」、「函數感」的重要歷程。首先要經過手繪，其次可學習操作電腦繪圖，再來是要由圖形的特徵(如極值、函數的增減)讀出函數在現實世界中之特別意涵。

f. 函數學習順序的建議：

一次函數鋪陳	5~6 年級
一次函數	7~8 年級
二次函數鋪陳	6~7 年級
二次函數	9~10 年級
多項式函數	11 年級
簡單有理函數	11 年級
絕對值函數	11 年級
根式函數	11 年級
指數與對數函數	11 年級
三角函數	11 年級
函數的四則運算	11 年級
函數的定義、合成函數、反函數	11 年級

## 6. 數學分析：

我們認為微積分涵蓋的範圍很廣，高中只能涵蓋一部份，比如說多項式微積分。我們贊成在暫綱中用微積分基本定理及牛頓法來展現微積分的威力。同時我們建議應廣泛開放高中生到大學選修微積分。

### (二)能力主軸：演算能力、抽象化能力、推理能力、連結能力、解題能力、溝通能力、使用科技工具能力

#### 1. 演算能力：

演算並非機械式的操作，而是為解決問題所進行必要的操作。演算的進行須建立在概念的理解上。演算的精進也深化我們對概念的理解。演算能力需要長時間、漸近且持續的練習才能精熟，過度或純機械式的操作只能有暫時的效果，或甚至有反效果，因此應該避免。文字、符號以及函數的代數操作應注意其演算的目的，需有具體的實例，並注意與現實世界是否連結，否則會演變成形式、機械式的操作。

演算能力還包括基本的心算與估算能力。

#### 2. 抽象化能力

抽象化能力有下面幾個內涵：

- (1) 能將具體世界中的概念以數學式子、文字、符號、函數、方程式或抽象體系的型等來表徵。
- (2) 能在抽象世界進行思考與形式操作。
- (3) 建立抽象體系的能力。
- (4) 能將抽象世界的推論回歸到具體世界。

#### 3. 推理能力

從國小開始，推理就必須視為是數學活動的一部分。例如，能觀察並了解一個類型、說明一個結果的正確性，或決定一個答案是否正確都是需要邏輯推理的活動。特別是當推理成為數學活動的一部分時，學生比較不會認為數學只是一些規則的集合而已，可以讓學生了解數學是可以了解且有意義的學習活動。具體而言，這個能力的內涵包含：

- (1) 能了解推理與證明是數學學習的基礎。
- (2) 面對問題能做數學的猜測並能以此猜測進行探究。
- (3) 能發展與評鑑數學的推論與證明。
- (4) 能選用不同的推理與證明方法。

學生若具有推理的能力，則他們會表現出：

- (1) 由觀察資料及辨識類型中作數學的猜測（歸納推理）。
- (2) 由邏輯的推理或反例的佐證驗證的有效性：建構有效的理論（演繹推理）。

推理幾何提供證明的訓練，但範圍應規範在實用價值高的題材，證明步驟不需太多，但學生必須學會嚴謹的數學推理。

#### 4. 連結能力

泛指建立知識體系過程中的連結，在這裡我們將其侷限在數學知識的內部連結與數學與具體世界的外部連結。連結必須要輔之以實例，同時要引導學生去嘗試將新學的東西與舊經驗作連結，並鼓勵學生舉實例。更深入的連結是數學建模的能力。

#### 5. 解題能力

在此解題意思不只是解決問題而已，問題解決能力的培養一直是數學課程與教學的一項重要目標，學生要能從學習與做數學中探索並了解問題。在這個過程中，學生形成問題、判斷結果，最後要能具有解決問題的信心。簡單說，解題能力是指學生在學數學與做數學時所用以思考及推理的方式。具體而言，這個能力的內涵包含：

- (1) 能解決數學學科及其他情境所引發的問題。
- (2) 能應用與採取不同的策略解題。
- (3) 能監控與反思數學的解題過程。

學生若具有解題的能力，則面對問題時他們會進行：

- (1) 了解一個問題的特性（了解一個問題，能用自己的話說明問題）。
- (2) 探究（畫圖、建立模型、表格、記錄資料、觀察類型）。
- (3) 選用一個適當的策略（嘗試錯誤，試著用簡單或類似的問題來做，往回推測，猜測並檢驗，估計答案）。
- (4) 解題（運用正確的解題策略解題）。
- (5) 回顧、修正及擴散（檢驗答案的合理性，探索與分析答案，形成規則）。

#### 6. 溝通能力

近來教育界開始重視教與學中的語言過程(linguistic processes)，即重視語言在教學內容與情境中所扮演的角色，Cazden(1988)甚至認為熟練學習內容即熟練語言。另外，溝通能力也應包括數學語文的表達，學生要能寫出邏輯清楚的數學敘述與文句。

學生若具有數學的溝通能力，則面對問題時，他們會表現出：

- (1) 能使用適當的數學符號及名詞。
- (2) 能提出質的說明。
- (3) 能清楚地溝通概念、想法及反思。
- (4) 能使用多重數學表徵（模型、圖片、表格、圖形）。
- (5) 能寫出邏輯清楚的數學文句。

#### 7. 使用科技工具能力

- (1) 使用數字計算器：這是在進入高中階段，學生熟練數的運算並建立估算能力之後，可以使用數字計算器，以節省計算時間。
- (2) 在高中階段，應練習使用科學計算器減少繁瑣計算與解決較困難的數學問題，如數學建模或其他學科上的數學問題。

附表一：綱要調整之建議

\*為時數足夠下（每天一節課）新增綱要調整之建議

(一)小學階段：

建議	說明
*負數：可考慮將負數作為相反數的意涵挪到小學處理，配合數線及坐標圖的學習，但在小學應避免負數的運算	由於7年級要完成負數以及負指數的學習，負擔太重，可以將部分負數的鋪陳移到小學
長方體之立體展開圖：改在6年級學習	8-s-33之立體展開圖部分目前放在8年級，並不合適，長方體之展開圖及表面積可以放在6年級
*坐標圖：坐標圖數對定點可在小學先作鋪陳	這在社會科、自然科以及6年級數學的統計折線圖均需要
平均數：應安排在小學介紹	9-d-04、9-d-05中之平均數在小學階段就會用到。
*變數、函數概念的鋪陳：可在小學高年級時先作鋪陳	透過發現樣式的規律性、以列表方式紀錄兩量關係並在坐標圖上標示，可以將函數觀念用較長時間鋪陳，避免7年級學得太快

(二)國中階段：

二元一次方程式：可分在7~8年級兩年學習	目前7年級的學習要從一元一次方程式、不等式到二元一次方程式及其圖形意涵，份量太重，其他國家都是以兩年完成
直線的点斜式：可在8年級介紹	8年級介紹直線是作為線性函數的圖形，斜率則為兩量的正比例。美國加州在7年級介紹點斜式；新加坡在9年級；韓國在8年級
*分式：可增加簡單分式及分式方程式，分母規範在一次	分式是反比關係的延伸，亦有廣泛的應用，在我國過去及各國的課綱裡均有。簡單分式可以配合簡單多項式之學習
推理幾何：內容與範圍可再縮小，如兩圓關係、弦切角、三角形內心可考慮刪除	兩圓關係及弦切角在各國綱要中均無提及，內心則只有在日本及大陸談及，這一部分刪除並不影響高中的學習

(三)高中階段：

課程內容的建議與說明：

建議	說明
因式分解：規範到三次以下。重點放在平方差、立方差、求根與有理式的化簡	仿照各國作法，對因式分解的次數及重點有所規範
多項式的輾轉相除法：多項式的輾轉相除法可以考慮刪除	整數的輾轉相除法定位為必修，但多項式之輾轉相除法不宜列為必修。
因式與餘式定理：因式定理應侷限在一次因式，以和三次以下的多項式因式分	新加坡有談因式、餘式定理；韓國有餘式定理；其餘國家均沒有。如果目標在

解相呼應	求多項式的根時，只需要一次因式定理檢定
*分式：應增加簡單分式、部分分式法及有理函數，分母規範在二次以下	分式應配合多項式的學習，在各國綱要中均有
指數對數和指數函數、對數函數可分兩階段學習	對文科的學生不見得需要學習指數對數函數，但需要瞭解指數和對數的概念
三角比和三角函數放在同一學期學習，鋪陳的節奏太快，可分在不同年級學習	其他國家都把三角比和三角函數分在不同的年級學習，
*函數操作：建議應加入四則運算、合成函數、反函數	各國皆安排於11或12年級學習函數操作，目前放在附錄中顯得重要性不足，但合成函數及變數變換概念在微積分裡很重要
*函數的應用：應將函數學習與具體世界連結寫入綱要的說明項目中	綱要中應舉實例指出基本函數在具體世界之應用，以強調函數的應用性，這是模仿大陸及美國加州的作法
遞迴關係：可以刪除，或限制在二次以下的線性差分方程	除大陸外各國都沒有提到數列的遞迴關係，大陸亦放在選修科目(演算法)
*隨機變數：應引進隨機變數的概念	機率與統計II作為選修時，可以介紹隨機變數的基本概念
機率與統計I及其所需之排列組合為許多學科的共同需求，應為必修，可放在10年級學習	排列組合放在10年級學習，內容不宜過深。

## 附表二：試擬之高中課綱架構

我們經過跨國比較分析，與專家座談之後，定出下列高中暫綱微調的原則：

1. 必修選修：為配合「以選修代替分流」我們建議 10 年級為必修，以後均為選修
2. 機率與統計 I 為各科所必需，應放在 10 年級
3. 三角比與三角函數可分兩階段學習
4. 指數對數與指數函數對數函數可分兩階段學習
5. 目前缺乏分式相關的學習

依據上面的原則，我們試擬一份高中必修選修的課程架構：數學 I~VI，每科均為 4 學分。

這是我們初步的看法，因此仍需經過週詳研究與廣泛討論，並經過試教程序才能定奪。

畫底線的部分為新增內容。數學 VI 定位為多項式微積分，不足以涵蓋一般微積分內容，能力好的學生可以在大學選修一學期的微積分代替數學 VI。

### 數學 I（四學分）

主題	主要內容	說明
一、 數系	1. 整數 2. 有理數與實數	1-1 含因數、倍數與輾轉相除法。 2-1 介紹無理數如 $\sqrt{n}$ 和 $\pi$ ，其中 $n$ 為非完全平方的正整數。含 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。 2-2 介紹基本的根式運算如 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ， $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 等。含分母為 $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ 時的有理化，其中 $n, m$ 為正整數。
二、 * 多項式與分式	1. 多項式的四則運算 2. 餘式定理、因式定理 3. 一次、二次多項式函數 4. 多項式方程式與不等式 5. <u>分式</u>	1-1 含綜合除法。 2-1 含整係數多項式的一次因式檢驗法。 3-1 含一次、二次多項式函數的圖形。 4-1 瞭解已分解為一次因式乘積的多項式在實數線上恆正、恆負的區間。 5-1 含部分分式法
三、 * 三角形的 基本 質	1. 直角三角形角邊關係（三角比） 2. 簡易測量與三角函數值表 3. 三角形邊角關係	1-1 先處理有一個銳角為 $30^\circ$ ，或 $45^\circ$ 的直角三角形邊角性質。 2-1 可用電算器求出三角函數值。 3-1 三角形中的正弦定理與餘弦定理



	4. 基本三角測量	
四、坐標系	1. 平面坐標系與直線* 2. 圓與極坐標	3-1 複習平面坐標系、直線方程式、斜率、分點公式，並介紹直線參數式。 3-2 以兩直線的關係說明二元一次方程組求解的幾何意義。 2-1 廣義角 2-2 極座標與平面座標系轉換 2-3 圓的標準式與參數式
附錄	認識證明	以到目前為止學過的數學，介紹如何進行推論與證明。 <u>學習兩欄式的證明寫法，一欄為推論過程，另一欄為推論所依據的理由。</u>

### 數學 II (四學分)

主題	主要內容	說明
五、數列與級數	1. 等差數列與級數 2. 等比數列與級數	1-1 含數列與級數的基本概念。 1-2 含等差級數與自由落體的關係。 2-1 處理複利問題。
六、* 對數與指數	1. 指數 2. 對數	
七、* 排列、組合	1. 集合元素的計數 2. 加法原理、乘法原理 3. 排列 4. 組合 5. 二項式定理	1-1 含排容原理。 3-1 排列組合應配合機率與統計 I 的學習，不宜過深 4-1 排列組合應配合機率與統計 I 的學習，不宜過深 5-1 以組合概念導出。
八、* 計 (一) 機率與統計	1. 事件與集合 2. 機率的性質 3. 數學期望值	1-1 集合簡介。 1-2 樣本空間與事件。

4. 統計資料的來源	4-1 觀測研究、抽樣調查、實驗。需介紹及使用亂數表，抽樣調查法需含簡單隨機抽樣法。
5. 分析一維數據	5-1 圖表編製，數據集中趨勢，數據離散趨勢，整合集中與離散趨勢，以瞭解數據的全貌。
6. 信賴區間與信心水準的解讀	6-1 常態分配及 68-95-99.7 規律。僅需處理二元資料，不必引進機率模型，以教學活動瞭解信賴區間與信心水準的解讀。

### 數學 III (四學分)

主題	主要內容	說明
一、 向量	1. 有向線段與向量 2. 向量的基本應用* 3. 平面向量的坐標表示法* 4. 平面向量的內積*	1-1 含向量的加法、減法、係數積與內積等運算。 2-1 含向量在平面幾何證明題上的應用，如三角形兩邊中點連線定理、平行四邊形定理。 3-1 含加法、減法、係數積與內積等運算以及分點坐標、直線的參數式。 4-1 含柯西不等式、正射影、兩直線的夾角、直線的法線式、點到直線的距離。
二、 空間中的直線與平面	1. 空間概念 2. 空間坐標系* 3. 空間向量的坐標表示法 4. 平面方程式 5. 空間直線方程式	1-1 空間中直線與直線、直線與平面、和平面與平面的位置關係。 3-1 含加法、減法、係數積與內積、 <u>外積</u> 等運算，柯西不等式，正射影。 4-1 含法向量、平面的夾角、點到平面的距離。 5-1 含直線的參數式、點到直線的距離、平行線的距離。

主題	主要內容	說明
	6. 一次方程組	6-1 限二元、三元。 6-2 含高斯消去法。 6-3 以解文字為係數的二元一次方程組 介紹克拉瑪公式和二階行列式。 6-4 以二階行列式求平面上平行四邊形 的面積。
三、 圓與球 面的方 程式	1. 圓的方程式* 2. 圓與直線的關係 3. 球面方程式 4. 球面與平面的關係	
四、 圓錐 曲線	1. 圓錐曲線名詞的由來 2. 拋物線（標準式） 3. 橢圓（標準式） 4. 雙曲線（標準式） 5. 圓錐曲線的光學性質	4-1 含漸近線。

#### 數學 IV (四學分)

五、 多項式 函數與 有理函 數	1. 複數與複數平面  2. 多項式方程式  3. 多項式函數與有理函 數的圖形	1-1 介紹 $i$ 的由來，含一元二次方程式根 的討論，特別是判別式小於 0 之情形。 1-2 介紹複數平面和複數的四則運算。複 數平面只是強調一一對應關係。  2-1 含代數基本定理的介紹，勘根定理和 實係數多項式方程式虛根成對定理。  3-1 三次以下多項式 3-2 有理函數分母為一次
數與指 函對數	1. 指數函數及其圖形	

	2. 對數函數及其圖形	2-1 指數與對數互為反函數的意義以公式直接表達，不一定要提反函數這三個字，但要在坐標平面上同時呈現這兩個函數的圖形。
七、三角函數	1. 三角函數的基本關係 2. 廣義角的三角函數 3. 三角函數的圖形* 4. 和角公式*、倍角*、半角公式 5. 正餘弦函數之疊合 6. 複數的極式	1-1 倒數關係、平方關係、商數關係、餘角關係。 3-1 含弧度。三角函數的圖形只談正弦、餘弦和正切。 5-1 以實例說明疊合的意義。 6-1 介紹向徑、輻角與極坐標之概念，含棣美弗定理，1 的 n 次方根。
八、函數操作	1. <u>函數的定義域與值域</u> 2. <u>合成函數</u> 3. <u>反函數</u>	1-1 談根式函數、有理函數之定義域 1-2 三角函數的值域 2-1 含一個變數的平移、伸縮 3-1 含正弦、餘弦、正切之反函數
九、級數	1. 數學歸納法* 2. 一般級數 3. 無窮等比級數	1-1 介紹數學歸納法並應用於證明。 2-1 形如 $\sum k^2$ , $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ , $\sum \omega^k$ 的實部與虛部，其中 $\omega^n = 1$ 3-1 介紹最基本的極限概念。

數學 V (四學分)

主題	主要內容	說明
一、 (二) 機率與統計	1. 獨立事件、條件機率與貝氏定理 2. <u>隨機變數</u> 3. 數學期望值與二項分配	3-1 需與信賴區間與信心水準的解讀結合。

主題	主要內容	說明
	4. 交叉分析 5. 分析二維數據	4-1 僅談兩個變數的情況，需與條件機率相結合。 5-1 散佈圖、相關係數、迴歸直線與最小平方法。
二、線性代數	1. 矩陣的加法與係數積 2. 矩陣的乘法及意義 3. 矩陣的列運算及增廣矩陣的應用 4. 行列式 5. 克拉瑪公式 6. 反方陣	1-1 強調矩陣的意義，多用實例說明。 2-1 含乘法的代數性質，轉移矩陣 (transition matrix) 多用實例說明。 4-1 限二階與三階，含行列式的基本性質及用行列式表示面積與體積。 5-1 限二元，三元。 6-1 含以列運算求反方陣及二階反方陣之行列式求法。 6-2 以二階反方陣之行列式求法解釋克拉瑪公式。
三、線性代數的應用	1. 線性規劃 2. <u>平移、旋轉、伸縮</u> 3. <u>二次式的標準化</u>	1-1 解二元一次不等式並在坐標平面上標示解區域。 1-2 只限二元。 3-1 只限二元

### 數學 VI (四學分)

主題	主要內容	說明
極限與導數 一、有理函數與多項式的	1. 函數及其圖形 2. 極限概念	1-1 複習一次函數與直線方程式。 1-2 複習二次函數與拋物線方程式。 2-1 引入 $\Delta x$ 並以直觀說明極限的意義。

主題	主要內容	說明
	3. 割線與切線  4. 導數與切線的斜率	3-1 引入 $\Delta y$ 及 $\Delta y/\Delta x$ 討論函數割線的斜率，並說明在運動學上的意義。 3-2 以二次函數說明割線斜率的極限是切線的斜率。 3-3 複習拋物線的光學性質。  4-1 定義導數及切線方程式。 4-2 說明導數在運動學上的意義。 4-3 以二項式定理或分解因式求極限得出多項式的導函數，並介紹導函數常用的符號。  4-4 <u>有理函數的微分</u>
二、導函數的應用	1. 函數圖形的描繪  2. 函數的極值  3. 三次函數的圖形  4. <u>有理函數的圖形</u>  5. 極值的應用	1-1 函數圖形的遞增、遞減和臨界點。 1-2 函數圖形的凹性和反曲點。  2-1 函數極值的一階二階檢定。  3-1 含對三次多項式實根個數的瞭解。  4-1 分母為二次以下多項式
三、多項式函數的積分	1. 黎曼和與面積  2. 求多項式函數圖形與直線 $x=a$ ， $x=b$ ，和 $y=0$ 圍出的面積  3. 定積分及其應用	1-1 直觀說明黎曼和對一再細分的分割所取的極限是面積。 1-2 在等分割時，對 $y=x^2$ 求出黎曼和的極限。  2-1 介紹定積分符號，反導函數（反微分）符號。  3-1 以求圓面積、球體體積、角錐體積、自由落體運動方程式為主。
附錄一	微積分基本定理	透過與黎曼求和的比較凸顯微積分基本定理的威力
附錄二	以牛頓法求整數開平方根的近似值。	介紹逼近的效率性，並展現微積分一次逼近的威力

## 捌、參考文件

- [C1] Mathematics framework for california public schools  
<http://www.cde.ca.gov/re/pn/fd/documents/mathematics-frame.pdf>
- [J1] 根據中國大陸 2004 年 9 月 15 日『人民日報』第十五版。
- [J2] 天津市九年制義務教育課程安排  
[http://www.tjjy.com.cn/xkjjxt/ldjs/ldjs2/\\_private/kegaishiyuan/peixunziliao/03-04/kechengjihua.htm](http://www.tjjy.com.cn/xkjjxt/ldjs/ldjs2/_private/kegaishiyuan/peixunziliao/03-04/kechengjihua.htm)
- [J3] 中國大陸教育部《普通高中課程方案（實驗）》和語文等十五個學科課程標準（實驗）。  
<http://www.moe.edu.cn/edoas/website18/info737.htm>
- [H1] : Korea, Ministry of Education & Human Resources Development, "Organization of the Curriculum and Time Allotment standards,"  
<http://www.moe.go.kr/en/down/curriculum-3.pdf>
- [H2] : Korea, Ministry of Education & Human Resources Development, "Korea's Education System", <http://www.moe.go.kr/en/down/part22004.pdf>
- [H3] : 匿名, "韓國教育制度", 中韓交流廣場,  
<http://apollo.mokpo.ac.kr/~china/kr-edu.html>
- [H4] : 由韓國李海娟小姐（畢業於台灣政治大學教育系，目前居住於韓國）提供的資訊（2005年4月20日提供）。
- [H5] : 韓國數學教育課程中譯本  
<http://www.math.ncu.edu.tw/~huangzq/krmath.doc>
- [Y1]、日本文部科學省網址：<http://www.mext.go.jp/>
- [Y2]、日本小學校學習指導要領：  
[http://www.mext.go.jp/b\\_menu/houdou/11/03/990302l.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/11/03/990302l.htm)
- [Y3]、日本中學校學習指導要領：  
[http://www.mext.go.jp/b\\_menu/houdou/11/03/990302x.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/11/03/990302x.htm)
- [Y4]、日本高等學校學習指導要領：  
[http://www.mext.go.jp/b\\_menu/houdou/11/03/990302a/990302l.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/11/03/990302a/990302l.htm)
- [Y5]、李園會（民92）《日本中小學新學習指導要領》。台北：水牛
- [Y6]、楊思偉（民88）《日本教育》。台北：商鼎。
- [S1] 林清山（譯）（1997）。Richard E. Mayer 著。《教育心理學》（Educational Psychology）。台北：遠流。
- [S2] 李咏吟，單文經（1997）。《教學原理》。台北：遠流。
- [S3] 沈珊珊，黃政傑（2003）。《國際比較教育學》。台北：正中。
- [S4] 許慧伶（2003）。新加坡的雙與政策與英語教育。《英語教學》，第27卷第四期，36-37。
- [S5] Singapore (2001) Primary Mathematics Syllabus
- [S6] Singapore (2001) Lower Secondary Mathematics Syllabus

- [S7] Singapore (2005) GCE Mathematics O Level Syllabus
- [S8] Singapore (2005) GCE Mathematics A Level Syllabus
- [S9] Singapore (2003) Education statistics digest
- [S10] Singapore, Ministry of Education, <http://www.moe.gov.sg/>
- [S11] Singapore, Ministry of Education, "School Information Service" <http://www2.moe.edu.sg/schinfo/>
- [S12] Singapore, Anderson primary school, <http://schools.moe.edu.sg/andersonps/timetable> : <http://schools.moe.edu.sg/andersonps/pl.htm>
- [S13] Singapore, Chua Chu Kang Primary School, <http://www.cckps.moe.edu.sg/> timetable : <http://www.cckps.moe.edu.sg/class/>
- [S14] Singapore, Paya lebar methodist girl's school (secondary), timetable : <http://www.plmgss.moe.edu.sg/webpage/pltable2004-3/main.htm>
- [S15] Singapore, St. Andrew's Junior College, <http://www.standrewsjc.moe.edu.sg/>
- [S16] <http://www.sjsedu.net.cn/jiaoshi4.asp?no=3605>
- [S17] H. K. Fong & Chelvi Ramakrishnan (2004) . Maths 3A. Singapore : Federal.
- [S18] H. K. Fong & Chelvi Ramakrishnan (2004) . Maths 4B. Singapore : Federal.
- [S19] Singapore Examinations and Assessment Board <http://www.seab.gov.sg/>
- [S20] Yearbook 2003 of Singapore <http://www.moe.gov.sg/corporate/yearbook/2003/index.htm>
- [S21] 翁婉珣 (2005), <台灣與新加坡數學綱要比較>, 國立中央大學數學研究所碩士論文。
- [E1] Dearing Report Website <http://www.leeds.ac.uk/educol/ncihe>
- [E2] BBC News, July 14, 1998. 再引自黃藿《英國文教輯要彙編》Sep 2002.
- [E3] GCSE Booster Pack, DfES, 2003.
- [E4] 以上五段中的數據資料, 全部直接引用, 或者間接計算自黃藿教授的『比較教育』自編教材《英國教育制度暨教改專輯》Sep 2002.
- [E5] 民眾意見寄去 Pauline Stephenson, QCA Mathematics Team, 83 Piccadilly, London W1J 8QC 或者 [stephensonp@qca.org.uk](mailto:stephensonp@qca.org.uk) 內文提到的春季報告是 QCA 文件編號 004063017.
- [E6] Mathematics, the National Curriculum for England, 1999, 95 pages.
- [E7] 英國國家課程網路版 National Curriculum Online <http://www.nc.uk.net/>
- [Y1] 日本文部科學省網址 : <http://www.mext.go.jp/>
- [Y2] 日本小學校學習指導要領 : [http://www.mext.go.jp/b\\_menu/houdou/11/03/9903021.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/11/03/9903021.htm)
- [Y3] 日本中學校學習指導要領 : [http://www.mext.go.jp/b\\_menu/houdou/11/03/990302x.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/11/03/990302x.htm)
- [Y4] 日本高等學校學習指導要領 :



[http://www.mext.go.jp/b\\_menu/houdou/11/03/990302a/9903021.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/11/03/990302a/9903021.htm)

[Y5] 李園會 (民 92)《日本中小學新學習指導要領》。台北：水牛

[Y6] 楊思偉 (民 88)《日本教育》。台北：商鼎。

[Y7] 沈姍姍 (民 89)《國際比較教育學》。台北：正中。

[Y8] Gail R. Benjamin 著 洪伯昌譯 (民 87)《日本小學教育》。台北：聯經。

[Y9] 莊雅斐 (2004) 日本教育改革的新動向。《教育研究月刊》第 122 期 p153-163。

[Y10] 林明煌 (2004) 日本課程改革之變遷。《教育研究月刊》第 122 期 p86-97。

[Y11] 時報資訊<http://www.ctitv.com.tw/new/news/news02.html?id=16&cno=1&sno=120094>

[Y12] 人民日報 2001 年 05 月 18 日第七版

[Y13] 金子守教授 (日本筑波大學) 吳欣芳譯 (2002) 日本高等教育現況與問題之探討。

<http://www.japanresearch.org.tw/forum-13.asp>

[Y14] 科學教育網 <http://big5.sedu.org.cn/gate/big5/data.sedu.org.cn/>

[Y15] Benton, Joshua (2001) 李勝富譯《教育模範生的日本將大力改革教育體制》。

<http://www.tw.org/newwaves/64/2-2.html>

[Y16] 正視當前東亞科學教育新趨勢 (2005)《知識通訊·評論月刊》

<http://k-review.com.tw/2005/05/01/145/>

## 玖、附錄

### 附錄一、台灣與加州數學綱要比較表

台灣與加州綱要低年級大致相似，所以不作比較。正式綱要：數與量代號是 n、代數代號是 a、圖形與空間代號是 s、統計與機率代號是 d。加州綱要：數字感代號是 n、代數與函數代號是 a、測量與幾何代號是 s、統計、資料分析與機率代號是 d，加州綱要指標第一碼假如直接是主題碼 n、a、s、d 代表它們是八年級以上以主題區分。

加州綱要的特色是一年級到高三的數學課程都有完整的設計，一到七年採分年指標清楚的呈現內容。八到十二則以主題方式分別書寫以利彈性安排，所以國中二年級之後比較難分辨出哪個年級學什麼內容，但是可以以每一主題一開始的指標當作八、九年級的程度，這裡不做全部指標對應，而是採主要教材做比較。

#### 1. 數與四則運算

項目	正式綱要		加州綱要	
	年級	說明	年級	說明
認識正整數	3	能認識 10000 以內的數及「千位」的位名，並進行位值單位換算。(3-n-01)	3	讀寫 10,000 以內數字(3-N-1.1)
	4	能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含「億」、「兆」之位名)，並作位值單位的換算。(4-n-01)	4	讀寫百萬以內數字(4-N-1.1)
	7	能用以十為底的指數表達大數或小數(包括日常生活長度、重量、容積等單位，如奈米、微米、公分或厘米、公尺或米、...)。(7-n-15)	7	可以科學符號(10 的正、負指數)表示有理數(7-N-1.1)
認識負數	7	能以「正、負」表徵生活中相對的量，並認識負數是性質(方向、盈虧)的相反。(7-n-01)	4	使用負數(含數線、計數、溫度)(4-N-1.8)
		能認識如 5 及 -5 在數線上的相對位置。(7-n-02)		
數小	3	能認識一位小數，並作比較與加減計算。(3-n-10)	2	認識小數符號(以錢幣為例)(2-N-5.2)

	4	能認識二、三位小數與百分位、千分位的位名，並作比較。(4-n-09)	3	認識簡單分數與小數的關係，如 $0.5=1/2$ ， $0.75=3/4$ (3-N-3.4)
	5	能認識多位小數，並作比較與加、減的計算，以及解決生活中的問題。(5-n-08)	4	2 位小數的運算(4-N-2.1)
		能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。(5-n-09)	5	小數四則運算(5-N-2.0)
			7	分數與有限小數、循環小數之互換(7-N-1.3)
分數	4	能在平分情境中，理解分數之「整數相除」的意涵。(4-n-06)	2	認識 $1/12$ 至 $1/2$ (2-N-4.1)
			3	比較簡單真分數(3-N-3.4)
	4	能理解等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。(4-n-08)	3	等值真分數(3-N-3.2)
			5	帶分數(5-N-2.3)
	5	能用通分作簡單異分母分數的比較與加減。(5-n-05)	5	分數乘除(5-N-2.4)
			5	分母為 20 以內分數的加減(5-N-2.3)
6	能作分數的兩步驟四則混合計算。(6-n-05)	6	分數四則運算(6-N-2.1)	
加減乘	3	能熟練加減直式計算（四位數以內，和 $<10000$ ，含多重借位）。(3-n-02)	3	10,000 以內數的加減(3-N-2.1)
	2	能理解九九乘法。(2-n-08)	3	能背九九乘法表(3-N-2.2)
			3	多位數與 1 位數的乘法(3-N-2.4)
	4	能熟練整數加、減、乘、除的直式計算。(4-n-02)	4	多位數的加減乘與應用(3-N-3.3)
4			理解加、減的直式算則(3-N-3.1)	
除法	3	能熟練三位數乘以一位數的直式計算，並解決二位數乘以二位數的乘法問題。(3-n-03)	4	理解多位數乘 2 位數的算則以及多位數除 1 位數的算則(3-N-3.2)
	6	能用直式處理除數為小數的計算，並解決生活中的問題。(5-n-04)	5	多位數除多位數（含小數）(5-N-2.2)
五 概 入 數 四 捨	4	能用四捨五入的方法，對大數在指定位數取概數，並做加、減之估算。(4-n-05)	3	萬位數內取最近的十、佰、仟的概數(3-N-1.4)
	5	能用四捨五入的方法，對小數在	4	百萬以內的概數(4-N-1.3)

		指定位數取概數，並做加、減、乘、除之估算。(5-n-10)	4	2 位小數取 1 位小數的概數(4-N-2.2)		
數	公 因 數 和 最 小 公 倍	質 因 數 分 解 ， 最 大	5	能理解因數、倍數、公因數與公倍數。(5-n-03)	4	認識質數，簡單整數的質因數分解(4-N-4.2)
			6	能認識兩數的最大公因數、最小公倍數與兩數互質的意義，理解最大公因數、最小公倍數的計算方式，並能將分數約成最簡分數。(6-n-02)	5	50 以內數的質因數分解(5-N-1.4)
			6			最小公倍數與最大公因數，並應用到約分與通分(6-N-2.4)
	科 學 命 數		7	能用以十為底的指數表達大數或小數(包括日常生活長度、重量、容積等單位，如奈米、微米、公分或厘米、公尺或米、...)。(7-n-15)	7	能以 10 的正、負指數來表示有理數(7-N-1.1)
數	與 無 理 數				7	能區別有理數與無理數(7-N-1.4)

附錄	10	認識證明：以到目前為止學過的數學，介紹如何進行推論與證明	8	<p>A I 24.0 學生能利用並知道簡單的邏輯論證：</p> <p>24.1 學生能解釋歸納推理與演繹推理的差別，並且能辨認與提供這兩種推理方式的例子。</p> <p>24.2 學生能分辨邏輯演繹中的假設與結論。</p> <p>24.3 學生能利用反例來證明一個斷言是錯的，並且清楚知道只要一個反例就足以反駁一個結論(assertion)。</p> <p>A I 25.0 學生能利用數系的性質來判斷結果的真實性、驗證過程中的每一個步驟、及證明或否定敘述(statement)。</p> <p>25.1 學生能利用數的性質為結論建立簡單、有效的論證（直接與間接的）或找到反例。</p> <p>25.2 學生能檢視每一步驟是否正確使用實數系的性質及運算次序，以判斷論證的真實性。</p> <p>25.3 已知關於線性、一元二次或絕對值式子的一個代數敘述、方程式或不等式，學生能判斷該敘述是有時正確呢？總是正確呢？或是完全不正確？</p>
----	----	------------------------------	---	---

從以上表格比較發現：除了負數概念加州綱要提早了3年外，對於數與運算二綱要主要內容差距不大，有關四捨五入與因數、倍數大約落後一年，正式綱要沒有介紹分數與有限小數、循環小數之互換、以及區別有理數與無理數。

## 2. 代數與函數

正式綱要			加州綱要	
項目	年級	說明	年級	說明

能以數學符號表示數學式子	4	能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式，並能解釋式子與原問題情境的關係。(4-a-02)	4	在式子中能用文字、符號、方塊等表徵一個數(4-A-1.1)
	3	能將具體情境中單步驟的乘、除問題列成算式填充題，並能解釋式子與原問題情境的關係。(3-a-01)	4	能使用字母、空格、或其他的符號來表示簡單等式中的任意數（例如：能理解並能使用變數的概念）。(4-A-1.0)
	4	能用中文簡記式表示長方形和正方形的面積公式與周長公式。(4-a-04)	4	能理解並能使用公式，以解決有關長方形、正方形的面積和周長的問題；能將複雜的圖形分割成基本的圖形(basic shapes)，再利用這些公式來求出該圖形的面積。(4-S-1.4)
	5	能用中文簡記式表示簡單平面圖形的面積，並說明圖形中邊長或高變化時對面積的影響。(5-a-04)	6	能在式子中，以變數來描述幾何的數量（例如： $P=2W+2L$ ， $A=1/2bh$ ， $C=\pi d$ —這些公式分別是矩形周長、三角形面積、圓周長）。(6-A-3.0)
	7	能由命題中用 $x$ 、 $y$ 等符號列出生活中的變量，並列成算式。(7-a-01)	5	能以文字表示未知數(5-A-1.2)
操作 數學式與方程式的	5	能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。(5-a-02)	6	用交換、結合、分配律來對數學式求值(6-A-1.3)
	5	能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化心算。(5-a-01)	5	能在含有變數的式子中使用分配律(5-A-1.3)
	6	能理解等量公理。(6-a-01)（同6-n-06）	4	知道等式兩邊加同數或乘同數後仍為等式(4-A-2.0)
比例	6	能認識比和比值，並解決生活中的問題。(6-n-07)	6	能解決分數、比值、比例和百分率的問題。(6-N-1.0)

附錄	10	1.函數的概念(未引進反函數及合成函數)	8~12	<p>A I 13.0 學生能將有理式與函數進行加、減、乘、除。學生能利用這些方法來解決計算性與概念性的問題。</p> <p>A I 16.0 學生能瞭解關係與函數的概念，並能判斷一個已知的關係是否能成為一個函數，並且能說明已知的關係以及函數所隱含的資訊。</p> <p>A I 17.0 學生能藉由圖形、一組序對或一系列式子，找出自變數(獨立變數)的定義域及因變數(相依變數)的值域。</p> <p>A I 18.0 學生能藉由圖形、一組序對或一系列式子，判斷是否為一個函數關係，並能說明理由。</p> <p>A II 24.0 學生能解決下列函數概念的問題：合成函數、定義反函數與函數的四則運算。</p> <p>M7.0 學生能瞭解以參數表示的函數與方程式，並且能畫出它們的圖形。</p>
數與關係(一次函數)	7	能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形。(7-a-14)	5	能利用整數的線性方程式解題，並能繪出其整數點的坐標圖(5-N-1.5)
	6	能理解速度的概念與應用，認識速度的普遍單位及換算，並處理相關的計算問題。(6-n-08)	6 6	測量單位的互換(其尺與英哩、公分與英吋)(6-A-2.1) 理解變化率的意義，並能解速度、距離、時間相關之問題(6-A-2.2)
數的圖形	7	能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形。7-a-14	7	能繪線性函數圖並認識斜率(7-A-3.3)
數與坐標系	7	能運用直角坐標系來標定位置。(7-a-11)	4	以直角坐標系來標出點的位置(4-S-2.0)
	10	1.整數：含因數、倍數與輾轉相除法。	8	A I 1.0 學生能區辨並使用整數、有理數、無理數及實數的子集合(subsets)之算術性質，包含初級算術的四則運算的封閉性質(closure properties)

	<p>2.有理數與實數：</p> <p>2-1 介紹無理數如<math>\sqrt{n}</math>和<math>\pi</math>，其中<math>n</math>為非完全平方的正整數。含<math>\sqrt{2}</math>是無理數的證明。</p> <p>2-2 介紹基本的根式運算如<math>\sqrt{18} = 3\sqrt{2}</math>，<math>\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}</math>，<math>\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}</math>等。含分母為<math>\sqrt{n} \pm \sqrt{m}</math>時的有理化，其中<math>n, m</math>為正整數。</p>	8	<p>A I 1.0 學生能區辨並使用整數、有理數、無理數及實數的子集合(subsets)之算術性質，包含初級算術的四則運算的封閉性質(closure properties)</p> <p>A I 2.0 學生能瞭解並利用這些運算來變號、找出倒數、開根號及取分數乘幕。他們能瞭解並利用指數法則。</p>
	<p>3.平面坐標系：</p> <p>3-1 複習平面坐標系，直線方程式，並介紹斜率。</p> <p>3-2 以兩直線的關係說明二元一次方程組求解的幾何意義。</p>	8	<p>A I 5.0 學生能解決多步驟問題，包含文字題、含有一個變數的一元線性方程式與線性不等式，而且學生要能對每個步驟做出合理的判斷(justification)。</p> <p>A I 6.0 學生能畫出一條線性方程式的圖形，並且算出<math>x</math>和<math>y</math>軸的截距(例如：畫出<math>2x + 6y = 4</math>的圖形)，他們也要能畫出線性不等式所代表的區域(例如：畫出<math>2x + 6y &lt; 4</math>代表的區域)。</p> <p>A I 7.0 學生能檢驗一點是否在一條線上(已知方程式)，學生能以點斜式的公式導出線性方程式。</p> <p>A I 8.0 學生能瞭解平行線與垂直線的概念，以及它們的斜率為何。學生能找出過已知點且垂直於已知直線的線性方程式。</p> <p>A I 9.0 學生能以代數的方法解二個變數(二元)的聯立線性方程組，而且能說明其解在圖形上的意義。學生能解出二條線性不等式的交集，並且畫出該交集的圖形。</p>
	<p>4.複數與複數平面：</p> <p>4-1 介紹<math>i</math>的由來，含一元二次方程式根的討論，特別是判別式小於<math>0</math>之情形。</p> <p>4-2 介紹複數平面和複數的四則運算。複數平面只是強調一一對應關係。</p>	8~12	<p>A II 5.0 學生能說明實數與複數在算術與圖形上的關係，尤其是能在平面上點出代表複數的點。</p> <p>A II 6.0 學生能做複數的加、減、乘、除等四則運算。</p> <p>A II 8.0 學生能利用因式分解、配方法或公式解來解出與畫出二次方程式；能利用這些技巧來解文字題；也要能解出在複數體中的二次方程式。</p>



一元一次方程式與不等式	7	能由具體情境中列出一元一次方程式，並理解其解的意義。(7-a-04)	6	學生能寫出口頭表示式 (verbal expressions)，能組成代數式及方程式；能求出代數式的值，能解決簡單的線性方程式、圖，並解釋它們的結果。(6-A-1.0)
		能以等量公理來解一元一次方程式，並作驗算。(7-a-05)		
		能利用移項法則來解一元一次方程式，並作驗算。(7-a-06)		
	7	能由具體情境中列出一元一次不等式。(7-a-07)	7	能解有理數下簡單的一次方程式與不等式(7-A-4.0)
		能利用移項法則在數線上找出一元一次不等式的解。(7-a-08)	8	能解多步的線性方程式(8-A-5.0)
二次二元方程式	7	能由具體情境中列出二元一次方程式，並理解其解的意義。(7-a-10)	8	<ul style="list-style-type: none"> <li>能解二元一次方程式與不等式(8-A-9.0)</li> <li>給一條直線方程式，能寫出垂直該線並通過特定點的直線方程式(8-A-8.0)</li> </ul>
		能由具體情境中列出二元一次聯立方程式，並能理解其解的意義。(7-a-16)		
絕對值	7	能認識如 5 及 -5 在數線上的相對位置。(7-n-02)	7	認識絕對值與距離的關係(6-N-2.5)
		能認識絕對值符號，並理解絕對值在數線上的圖義。(7-n-05)	8	能解有絕對值的方程式與不等式(8-A-3.0)
		能用絕對值的符號表示數線上兩點間的時間 (距離)。(7-n-06)		
根號	8	能求二次方根的近似值。(8-n-02)	7	能求整數平方根的整數估計值(7-N-2.4)
一元二次方程式	8	能利用因式分解來解一元二次方程式。(8-n-14)	8	<ul style="list-style-type: none"> <li>能以因式分解或配方法解一元二次方程式(8-A-14.0)</li> <li>懂得一元二次方程的公式解及其證明(8-A-20.0)</li> <li>能應用一元二次方程式到物理問題，如重力下的物體運動(8-A-23.0)</li> </ul>
	8	能利用配方法解一元二次方程式。(8-a-15)		
	8	能利用一元二次方程式解應用問題。(8-a-17)		
對數與指數			7	理解正負指數，利用指數定律做數的四則運算(7-A-2.0)
			8	指數定律 (不限於整數的指數) (8-A-2.0)

	10	1.指數	8~12	A II 12.0 學生瞭解分數指數法則、指數函數，並且能利用這些函數來解決指數型的消長問題。
	10	2.指數函數及其圖形		
	10	3.對數	8~12	A II 11.0 學生能證明簡單的對數法則： 11.1 學生能瞭解指數與對數的互逆關係，並能利用這個關係來解決有關指數與對數的問題。 11.2 學生能檢驗論證的每一個步驟是否正確地應用實數、指數與對數的性質，以判斷該論證是否正確。 A II 13.0 學生能利用對數的定義來轉換任何基底的對數。 A II 14.0 學生能瞭解與利用對數的性質以化簡對數式子，並且能算出大約的值。
	10	4.對數函數及其圖形：指數與對數互為反函數的意義以公式直接表達，不一定要提反函數這三個字，但要在坐標平面上同時呈現這兩個函數的圖形。	8~12	A II 15.0 對於有理式、含有根號的式子、對數函數或指數函數的特定代數式子，學生能判斷：有時對、一定對或是絕對錯。
	10	5.查表、內插法：可用電算器求出指數函數與對數函數的值。	8~12	A II 14.0 學生能瞭解與利用對數的性質以化簡對數式子，並且能算出大約的值。
多項式			7	能繪出 $y=nx^2$ , $y=nx^3$ 圖形(7-A-3.1)
			7	單項式乘、除(7-A-2.2)
			8	· 多項式四則運算(8-A-10.0) · 三次多項式以下的因式分解(8-A-11.0)
	10	1.多項式的四則運算：含綜合除法。	8~12	A I 10.0 學生能對單項式與多項式做加、減、乘、除。學生能利用上述那些技巧解決多步驟問題，包括文字題。 A II 3.0 學生會使用多項式的運算，例如：長除法。 A II 4.0 學生能分解多項式的平方差、三項完全平方式，及立方和與立方差。
	10	2.餘式定理、因式定理：含整係數多項式的一次因式檢驗法。	8	A I 11.0 學生能利用基本的因式分解方法以分解二次與簡單的三次多項式，這些方法包括找出多項式中所有項的公因式，找出平方差，以及找出二項式的完全平方式。

	10	3.最高公因式與最低公倍式：利用輾轉相除法求最高公因式		
	10	4.多項式函數：含一次、二次多項式函數的圖形。	8	<p>A I 21.0 學生能畫出一元二次函數的圖形，並且瞭解該函數的根就是 x 軸的截距。</p> <p>A I 22.0 學生能利用一元二次方程式的解答公式、因式分解或同時利用這兩種方式判斷一元二次函數的圖形與 x 軸是不相交、交於一點或二點。</p> <p>A I 23.0 學生能將一元二次方程式應用到物理問題，例如：在有重力的情況下，物體的運動問題。</p>
	10	4.廣義角的三角函數	8~12	<p>A II 9.0 學生能說出並解釋(demonstrate and explain)「改變一個二次函數的係數，會對該函數的圖形造成什麼影響」，也就是說，當方程式 <math>y = a(x - b)^2 + c</math> 中的 a、b 與 c 改變時，學生能知道該方程式的圖形會如何改變。</p> <p>A II 10.0 學生能畫出二次函數的圖形，並且能求出該函數的最大值、最小值與函數值等於 0 的解。</p>
	10	5.多項式方程式：含代數基本定理的介紹，勘根定理和實係數多項式方程式虛根成對定理。		M4.0 學生能瞭解代數基本定理，並應用之。
	10	6.多項式不等式：瞭解已分解為一次因式乘積的多項式在實數線上恆正、恆負的區間。		

有理式			8~12	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 有理式之化簡(8-A-12.0)</li> <li>A I 12.0 學生能將分子與分母都是多項式的分式，進行因式分解及約分化簡之。</li> <li>A I 13.0 學生能將有理式與函數進行加、減、乘、除。學生能利用這些方法來解決計算性與概念性的問題。</li> <li>A II 7.0 學生能將分母為單項式與多項式的有理式作加、減、乘、除、化簡與求值，以及化簡分母含負指數的複雜有理式。</li> <li>M6.0 學生能求出有理函數的根與極點，並且能畫出該函數的圖形與漸進線。</li> </ul>
三角函數的性質與應用	10	1.三角函數的圖形：含弧度。三角函數的圖形只談正弦、餘弦和正切。	8~12	<ul style="list-style-type: none"> <li>T1.0 學生能瞭解角度的觀念，以及如何測量角度與徑度。他們能做角度與徑度的轉換。</li> <li>T2.0 學生知道 <math>\sin</math> 與 <math>\cos</math> 的定義就是單位圓上點的 <math>y</math> 坐標與 <math>x</math> 坐標，並且熟悉 <math>\sin</math> 與 <math>\cos</math> 的函數圖形。</li> <li>T4.0 學生能畫出 <math>f(t)=A \sin(Bt+C)</math> 或 <math>f(t)=A \cos(Bt+C)</math> 的函數圖形，並且以振幅、頻率、週期與相的改變來詮釋 <math>A</math>、<math>B</math> 與 <math>C</math>。</li> <li>T5.0 學生能瞭解 <math>\tan</math> 與 <math>\cot</math> 的定義，並且能畫出它們的圖形。</li> </ul>
	10		8~12	T7.0 學生能瞭解一條直線與 $x$ 軸的交角，該角的正切函數就等於那條線的斜率。
	10	2.和角公式：含積化和差公式。	8~12	T10.0 學生能瞭解並證明 $\sin$ 與 $\cos$ 的加法公式，並且能應用那些公式去證明或簡化三角函數的其它式子。
	10	3.倍角、半角公式	8~12	T11.0 學生證明 $\sin$ 與 $\cos$ 的半角公式與倍角公式，並且能應用那些公式去證明或簡化其他三角函數的式子。
	10	4.正餘弦函數之疊合：以實例說明疊合的意義。	8~12	T10.0 學生能瞭解並證明 $\sin$ 與 $\cos$ 的加法公式，並且能應用那些公式去證明或簡化三角函數的其它式子。

	10	5.複數的極式：介紹向徑、幅角與極坐標之概念，含棣美弗定理，1的n次方根。	8~12	<p>T15.0 學生能熟悉極坐標，特別是已知平面坐標平面上一點，學生能求出該點的極坐標，反之亦然。</p> <p>T16.0 學生能將一般坐標平面的已知方程式改成以極坐標的方式表示。 例題：請以極坐標表示半徑為2，圓心在(2,0)的圓。</p> <p>T17.0 學生能熟悉複數，他們能以極坐標的形式表示複數，而且知道如何以極坐標的形式去處理複數相乘的問題。</p> <p>T18.0 學生能瞭解棣美弗定理 (DeMoivre's theorem)，並且能以極坐標的形式求出一個複數的n次方根。</p> <p>M2.0 學生能熟練複數的四則運算，他們能運用複數的三角函數形式，並且能瞭解只有一個複變數的函數可以看成有兩個實變數的函數。他們能瞭解棣美弗定理的證明。</p>
聯立方程組與矩陣	12		8~12	<p>L1.0 學生能利用高斯-約旦 (Gauss-Jordan) 消去法，以解決多變數的聯立線性方程式。</p> <p>L2.0 學生能將聯立方程式轉換成係數矩陣，然後利用高斯-約旦方法進行矩陣的列運算。</p> <p>L6.0 學生能瞭解聯立方程組是矛盾 (沒有解)、只有一個解或者是有無限多解。</p> <p>L7.0 學生能瞭解向量及向量加法 (藉由平行四邊形) 在平面與三維空間的幾何意義。</p> <p>L8.0 學生能瞭解聯立方程組的解集合的幾何意義，例如：二元線性方程式的解集合就是平面上的一條直線；二元一次聯立方程組的解集合就是平面上兩條直線的交點。</p>
矩陣的運算	12	1.矩陣的加法與係數積：強調矩陣的意義，多用實例說明。	8~12	L4.0 學生能做矩陣與向量的加法運算。
	12	2.矩陣的乘法及意義：含乘法的代數性質，轉移矩陣 (transition matrix) 多用實例說明。	8~12	L5.0 學生能算出矩陣與向量的乘積，以及矩陣與純量的乘積。

			8~12	L12.0 學生能算出 $n$ 維空間中二個向量的純量乘積，並且瞭解兩個向量互相垂直則向量乘積為 0。
	12	3.矩陣的列運算及增廣矩陣的應用	8~12	L3.0 學生能將矩形矩陣化簡為上三角矩陣。
	12	4. 行列式：限二階與三階，含行列式的基本性質及用行列式表示面積與體積。	8~12	L10.0 學生能算出 $2 \times 2$ 與 $3 \times 3$ 矩陣的值，並且瞭解這些值所代表的幾何意義，就是二維與三維空間中的標準基底向量所圍出空間的面積與體積。
	12	5. 克拉瑪公式：限二元，三元。	8~12	L11.0 學生能瞭解一個方陣若為可逆，若且唯若該方陣的行列式的值不為 0。他們能利用列的簡化法 (row reduction methods) 或克拉瑪法則 (Cramer's rule) 來求出 $2 \times 2$ 與 $3 \times 3$ 的反矩陣。
	12	6. 反方陣：6-1 含以列運算求反方陣及二階反方陣之行列式求法 6-2 以二階反方陣之行列式求法解釋克拉瑪公式。	8~12	L9.0 學生能瞭解反方陣的觀念，並且利用這個觀念來解出聯立線性方程式。
不等式	12	1.絕對不等式（證明不等式）： 柯西不等式、算幾不等式、應用實例。	8~12	
	12	2.條件不等式（解不等式）： 2-1 以分解因式解一元多項式不等式並在數線上標示解區間。 2-2 解二元一次多項式不等式並在坐標平面上標示解區域。 2-3 利用代數方法、幾何方法（圖形），以及絕對不等式求函數在限制條件下的極大、極小。求極值的函數以低次多項式為主。	8~12	A I 5.0 學生能解決多步驟問題，包含文字題、含有一個變數的一元線性方程式與線性不等式，而且學生要能對每個步驟做出合理的判斷 (justification)。 A I 6.0 學生能畫出一條線性方程式的圖形，並且算出 $x$ 和 $y$ 軸的截距，他們也要能畫出線性不等式所代表的區域。 A II 1.0 學生能解決含有絕對值的方程式與不等式。 A II 2.0 學生能利用代入消入法、圖形或矩陣來解決聯立線性方程式與聯立線性不等式 (二元或三元) 的問題。
	12	3.線性規劃：只限二元。	8~12	

一、向量	11	1.有向線段與向量：含向量的加法、減法、係數積與內積等運算。	8~12	L7.0 學生能瞭解向量及向量加法（藉由平行四邊形）在平面與三維空間的幾何意義。 L12.0 學生能算出n維空間中二個向量的純量乘積，並且瞭解兩個向量互相垂直則向量乘積為0。
	11	2.向量的基本應用：含向量在平面幾何證明題上的應用，如三角形兩邊中點連線定理、平行四邊形定理。		
	11	3.平面向量的坐標表示法：含加法、減法、係數積與內積等運算以及分點坐標、直線的參數式。		
	11	4.平面向量的內積：含柯西不等式、正射影、兩直線的夾角、點到直線的距離。		
	11		8~12	M1.0 學生能熟悉並應用極坐標與平面向量。特別是能做極坐標與一般平面坐標之間的轉換，能解釋極坐標與向量在圖形上的意義。
空間中的直線與平面	11	1.空間概念：空間中直線與直線、直線與平面、和平面與平面的位置關係。	8~12	L7.0 學生能瞭解向量及向量加法（藉由平行四邊形）在平面與三維空間的幾何意義。 L12.0 學生能算出n維空間中二個向量的純量乘積，並且瞭解兩個向量互相垂直則向量乘積為0。
	11	2.空間坐標系		
	11	3.空間向量的坐標表示法：含加法、減法、係數積與內積等運算，柯西不等式，正射影。		
	11	4.平面方程式：含法向量、平面的夾角、點到平面的距離。	8~12	
	11	5.空間直線方程式：含直線的參數式、點到直線的距離、平行線的距離、歪斜線的公垂線段長。	8~12	M7.0 學生能瞭解以參數表示的函數與方程式，並且能畫出它們的圖形。

	11	6.一次方程組： 6-1 限二元、三元。 6-2 含高斯消去法。 6-3 以解文字為係數的二元一次方程組介紹克拉瑪公式和二階行列式。 6-4 以二階行列式求平面上平行四邊形的面積。	8~12	L1.0 學生能利用高斯-約旦（Gauss-Jordan）消去法，以解決多變數的聯立線性方程式。 L8.0 學生能瞭解聯立方程組的解集合的幾何意義，例如：二元線性方程式的解集合就是平面上的一條直線；二元一次聯立方程組的解集合就是平面上兩條直線的交點。 L10.0 學生能算出 $2 \times 2$ 與 $3 \times 3$ 矩陣的值，並且瞭解這些值所代表的幾何意義，就是二維與三維空間中的標準基底向量所圍出空間的面積與體積。 L11.0 學生能瞭解一個方陣若為可逆，若且唯若該方陣的行列式的值不為 0。他們能利用列的簡化法（row reduction methods）或克拉瑪法則（Cramer's rule）來求出 $2 \times 2$ 與 $3 \times 3$ 的反矩陣。
--	----	--	------	---

從以上表格比較發現：二者綱要對於代數與函數主要內容差距頗大，加州綱要有關未知數介紹的早，之後正式綱要有關代數也較為落後，內容與仔細度也略為不足。代數與函數的概念與應用都比正式綱要早好幾年開始，加州綱要三年級要求學生能選擇適當的符號、運算法則和性質去表徵、描述、簡化和解決簡單的數字關係，再要求能表徵簡單的函數關係，能解決兩個量之間的函數關係的簡單問題結合其他數學主題，鋪陳之後，每年都設計可以觸及這些的教材，慢慢加深加廣，最後才在國中收尾，並要求能使用函數來描述事件之間量的關係。這種從函數、變數到代數的安排符合教育的理念，這是正式綱要還可以在加強改進的地方。

3.測量與幾何				
我國綱要			加州綱要	
項目	年級	說明	年級	說明
重量、長度、角度、容量、數量、	3	能認識長度單位「毫米」，及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並作實測與相關計算。(3-n-12)	3	能使用測量工具與單位估計與測量長度、液體體積、重量(3-S-1.0)
	3	能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較不同容器的容量。(3-n-13)		
稱對	5	能認識線對稱，並理解簡單平面圖形的線對稱性質。(5-s-04)	4	能辨識線對稱和點對稱的圖形(兩側對稱及旋轉對稱)。(4-S-3.4)



	8	能理解平面圖形線對稱的意義。(8-s-10)		
周長、面積、體積	4	能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較不同體積的大小，並認識體積單位「立方公分」。(4-n-17)	3	能測量簡單形狀的面積（長方形、平行四邊形）(3-S-1.2)
			4	長方形面積與周長(4-S-1.0)
			5	長方體體積、表面積(5-S-1.2)
	5	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(5-n-16)（同 5-s-05）	5	以拼湊方式並利用長方形面積之公式推導出三角形、四邊形的面積公式(5-S-1.1)
6	能理解簡單直立柱體的體積為底面積與高的乘積。(6-n-13)（同 6-s-06）	6	三角柱、圓柱之體積公式並與長方體積公式作比較(6-S-1.3)	
		7	了解尺度變化時對周長、面積、體積的影響(7-S-2.3)	
責與圓面積	6	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。(6-n-12)（同 6-s-04）	6	了解 $\pi$ 的意義及其 3.14 與 $22/7$ 的估計值(6-S-1.2)
三、圓與球面的方程式	11	1.圓的方程式	8~12	A II 17.0 已知二次方程式 $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ ，學生能利用配方法，將該方程式配成標準形式，而且能判斷該方程式的圖形是圓形、橢圓形、拋物線或雙曲線，然後，學生能將該方程式的圖形畫出。
	11	2.圓與直線的關係		
	11	3.球面方程式	8~12	
	11	4.球面與平面的關係	8~12	
辨識、描述與定義形體（三角形、四邊形、多邊形、圓形）	6	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。(6-s-01)	3	能描述等腰、正、直角三角形、平行四邊形、正方形、正方體、圓、圓柱、三角柱、錐體(3-S-2.0)
	4	能理解平面上直角、垂直與平行的意義。(4-s-06)	4	辨認垂直與平行、圓心與直徑 · 辨識全等圖形，辨識線對稱與旋轉對稱 · 各式三角形的定義 · 各式四邊形的定義(4-S-3.0)
	4	能由直角、垂直與平行的概念，認識簡單平面圖形。(4-s-07)		
	6	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。(6-s-01)	6	學生能深入理解平面圖形和立體物件的測量，並能藉此解題。(6-S-1.0)

	5	能透過操作，理解三角形三內角和為180度。(5-s-01)	5	能辨識、描述、分類平面與空間幾何體的性質與關係（包括三角形內角和為 $180^{\circ}$ 、四邊形內角和 $360^{\circ}$ ），並用之解幾何問題(5-S-2.0)
	8	能認識並定義簡單幾何圖形的點、線、角。(8-s-02)		
	8	能熟練基本尺規作圖。(8-s-07)	7	能辨識並能用尺規對幾何形狀的要素作圖：高、中點、對角線、平分角、垂直平分線、中心角、半徑、直徑、弦(7-S-3.1)
	8-9	能熟練基本尺規作圖。(S-4-9)	9	能以尺規作圖：二等分角、垂直平分線、過特定點且平行於某直線的平行線(S-16.0)
全等	8	8-s-14 能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義。(8-s-14)	7	說明並了解兩幾何圖形全等之條件(7-S-3.4)
		能理解三角形全等的性質。(8-s-15)		
幾何證明	9	能根據平行線截線性質作推理。(9-s-01)	9	學生能證明全等與相似概念的基本定理。(9-S-7.0)
		能對簡單的相似多邊形指出對應邊成比例、對應角相等性質。(9-s-02)		內接、外切多邊形相關之幾何證明題(S-21.0)
		能理解三角形的相似性質。(9-s-03)		學生能證明全等與相似概念的基本定理。(S-4.0)
		能理解平行線截比例線段性質。(9-s-04)	8-9	學生能證明與利用的平行線截線性質、四邊形的性質與圓的性質在內的定理。(S-7.0)
		能利用相似三角形對應邊成比例的觀念，應用於實物的測量。(9-s-05)		學生能證明三角形的全等或相似，而且能利用全等三角形的對應概念。(S-5.0)
		能理解直線與圓及兩圓的關係。(9-s-06)		學生能利用平面坐標系來證明以下定理：一線段的中點坐標公式、距離公式及直線與圓的方程式之各種等式。(S-1.7)
		能理解圓的相關性質。(9-s-07)		

		能理解三角形外心的定義和相關性質。(9-s-08)		
		能理解三角形內心的定義和相關性質。(9-s-09)		
		能理解三角形重心的定義和相關性質。(9-s-10)		
		能以三角形和圓的性質為題材來學習推理。(9-s-11)		學生能辨認與舉出未定義術語、公設、定理及歸納與演繹推理的例子。(S-1.0) 學生能寫出幾何證明，包括歸謬證法。(S-2.0) 學生能組織一套邏輯論證並判斷論證的有效性，而且能利用反例來反駁一個敘述。(S-3.0)
三角			7	透過測量理解畢氏定理及其反敘述，並用它求直角三角形之未知邊長(7-S-3.3)

從以上表格比較發現：加州綱要更講究鋪陳，而且要求訓練推理與證明的目標清楚。正式綱要一開始要求操作與認識，七年級沒有幾何教材，九年級主要的內容是理解，尚未達到推理與證明（說明）階段，整個加州綱要並未談及三角形內心、外心、重心的定義和相關性質。

#### 4. 統計、資料分析、機率

正式綱要			加州綱要	
項目	年級	說明	年級	說明
料收集、整理資	4	能報讀生活中資料的統計圖，如長條圖、折線圖與圓形圖等。(4-d-01)	2	收集、整理數值資料，展示成長條圖或其他圖示，並能由其中問答簡單問題(2-D-1.0)
		能報讀較複雜的長條圖。(4-d-02)	4	能做問卷，有系統收集數據，並製作相關之圖表(4-D-1.0)
認識日常生活中的機會			3	進行簡單機率實驗，並作簡單預測 · 辨識日常事件的機率意義：確定、有可能、不太可能、完全不可能(3-D-1.0)
				· 記錄簡單事件的重複實驗（如擲銅板） (3-D-1.1)

			4	<ul style="list-style-type: none"> <li>能將機率實驗結果整理成圖表(4-D-2.1)</li> <li>能報讀簡單之機率（如 <math>3/4</math>）(4-D-2.2)</li> </ul>
二維資料	5	能整理有序資料，能報讀生活中有序資料的統計圖，並繪製成長條圖折線圖。(5-d-01、5-d-02、5-d-03)	5	知道如何紀錄二維資料 (x,y) 及其圖示(5-D-1.5)
	6	能整理生活中的資料，並製成圓形圖。(6-d-01)		
量 認識基本統計	9	能認識平均數、中位數與眾數均可以某個程度地表示整筆資料集中的位置。(9-d-04)	5	知道平均數、中位數等統計量(5-D-1.1)
	9	能認識平均數、中位數與眾數在不同狀況下，被使用的需求度有些微的差異。(9-d-05)	6	計算範圍、平均、中位數等統計量，瞭解增加與減少樣本實對上述統計量的影響(6-D-1.0)
機率、抽樣的意義			6	利用抽樣資料來描述抽樣的特徵與侷限(6-D-2.0)
	9 <sup>1</sup>	能以具體情境介紹機率的觀念。(9-d-09) 能進行簡單的實驗以了解抽樣的不確定性、隨機性質等初步概念。(9-d-10)	6	定出理論與實驗的機率，並用之於預測。將機率表徵為比、比率，與介於 0 到 1 之間的小數。知道某事件發生機率為 p，則其不發生之機率為 1-p · 了解獨立與相依事件的區別(6-D-3.0)
統計調查與分析	9	能將原始資料整理成次數分配表，並製作統計圖形，來顯示資料蘊含的意義。(9-d-01)	7	能收集、整理、表徵多變量的資料，並能透過手算或電腦軟體的幫助，辨識其間的關係(7-D-1.0)
		能理解百分位數的概念，認識第 10、25、50、75、90 百分位數，並製作盒狀圖。(9-d-02)	7	能理解一組資料中的最小值、下四分位數、中位數、上四分位數、最大值的意義，並且能計算之。(7-D-1.1)
	9	能利用較理想化的資料說明常見的百分位數，來認識一筆或一組資料在所有資料中的位置。(9-d-03)	7	能知道不同形式所呈現的資料，包括樹狀圖(stem-and-leaf)或是盒鬚圖(box-and-whisker plot)；能使用上述的形式來呈現一組資料，或是比較兩組資料。(7-D-1.3)

<sup>1</sup> 九年一貫數學領域有關機率只有這兩條指標，而且安排在國三介紹，加州綱要從三年級就開始介紹簡單的機率概念，這樣的對比當然有些奇怪，但卻是事實，這裡相信兩者介紹的內容有難易的差異。

		能認識平均數、中位數與眾數均可以某個程度地表示整筆資料集中的位置。(9-d-04)	6	能算出全距、平均數、中位數和眾數。(6-d-1.1)
		能認識平均數、中位數與眾數在不同狀況下，被使用的需求度有些微的差異。(9-d-05)	6	能知道為什麼某種特定的集中趨勢(平均數、中位數、眾數)能提供最有用資訊的理由。(6-d-1.4)
		能認識全距，並理解全距大小的意義。(9-d-06)		
		能認識第 1、2、3 四分位數，及四分位距。(9-d-07)	7	能理解一組資料中的最小值、下四分位數、中位數、上四分位數、最大值的意義，並且能計算之。(7-d-1.3)
		能理解當存在少數特別大或特別小的資料時，四分位距比全距更適合來描述整組資料的分散程度。(9-d-08)	7	能在散布圖表徵兩數值變數；能非正式地說出各點的分布情形以及兩個變數之間的關係(7-d-1.2)
排列組合	11	1.集合元素的計數：含排容原理。	8~12	A II 18.0 學生能利用基本的數數法則以計算排列組合的樣式數量。
	11	2.加法原理、乘法原理	8~12	A II 18.0 學生能利用基本的數數法則以計算排列組合的樣式數量。
	11	3.排列		
	11	4.組合		
	11	5.二項式定理：以組合概念導出。	8~12	A II 20.0 學生能瞭解二項式定理並利用之，以展開乘幕為正整數的二項式。
	11	6.遞迴關係：遞迴關係以 $a_n = \alpha a_{n-1} + f(n)$ 及 $a_n = \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2}$ 的形式為主，其中 $\alpha, \beta, \gamma$ 為常數， $f(n)$ 是次數小於 3 的多項式。		
機率與統計 (I)	11	1.事件與集合	10~12	P I 1.0 學生能瞭解 <b>獨立事件</b> 的定義，並且能利用加法原則、乘法原則與互補關係來解決有限樣本空間中特定事件的機率問題。
	11	2.機率的性質	10~12	

	11	3.數學期望值	10~12	
	11	4.統計資料的來源	10~12	P II 15.0 學生能熟悉數量分配(distribution of values)的統計觀念、統計學上的抽樣分配觀念及統計學的變異性觀念。 P II 16.0 學生能瞭解一些關於抽樣分配(sampling distribution)的平均數與標準差兩者之間的關係，以及母樣本分配(population distribution)的平均數與標準差等基本觀念。
	11	5.分析一維數據	10~12	P I 6.0 學生能瞭解資料中次數分配的平均數、中位數與眾數之定義，並且能在特定情況下算出每一種數。 P I 8.0 學生能藉由一些不同方法來組織與描述資料的分配情形，這些方法包括次數分配表、直方圖、標準的折線圖、長條圖、枝葉圖(stem-and-leaf displays)、散佈圖(scatterplots)與盒狀圖。 P II 10.0 學生能瞭解資料次數分配的平均數、中數與眾數的意義，並且能在特定情況下求出這三種數。
	11	6.信賴區間與信心水準的解讀	10~12	P II 17.0 學生能從常態分配的資料中進行簡單隨機抽樣，求出抽樣的信賴區間後；在某個邊際誤差的條件下，決定需要抽取多少樣本。
機率與統計(II)	12	1.獨立事件、條件機率與貝氏定理	10~12	P I 2.0 學生能瞭解條件機率的定義，並且利用它來解決有限樣本空間的機率問題。 P II 1.0 學生能利用機率分配的加法原理、乘法原理與互補關係(complementation)來解決有限樣本空間的機率問題，並且能瞭解獨立事件的個別性。 P II 2.0 學生能瞭解條件機率的定義，並用來解決有限樣本空間的機率問題。
	12	2.數學期望值與二項分配	10~12	
	12	3.交叉分析	10~12	P I 7.0 學生能算出資料中分配次數的變異數與標準差。 P II 11.0 學生能求出資料次數分配的變異數與標準差。

	12	4.分析二維數據	10~12	<p>P II 12.0 學生能利用最小平方的迴歸法 (least squares regression), 以找出最適合某一資料分配的迴歸線。</p> <p>P II 13.0 學生能瞭解兩變數之相關係數的意義, 並且熟悉相關係數的性質。</p> <p>P II 14.0 學生能組織與描述資料分配的各種方法, 其方法包括製作頻率表格 (frequency tables)、直方圖、標準的線型和長條圖、枝葉圖 (stem-and-leaf displays)、散佈圖 (scatterplots) 與盒狀圖等不同方法。</p>
--	----	----------	-------	--

隨機變數			10~12	<p>P I 3.0 學生能瞭解離散型隨機變數的觀念，利用它們來解決機率問題</p> <p>P I 4.0 學生能瞭解標準分配（常態型、二項式型與指數型），並且利用這些分配類型以解決各種題目中的事件。</p> <p>P I 5.0 學生能算出常態隨機分配變數的平均數與標準差。</p> <p>P II 3.0 學生能瞭解<b>離散型隨機變數</b>的觀念，能利用該觀念來解決機率問題</p> <p>P II 4.0 學生能瞭解<b>連續型隨機變數</b>的觀念，並且能將機率解釋成：帶有隨機變數的機率密度函數（或稱頻率函數分配）之圖形內的某區域面積。</p> <p>P II 5.0 學生能瞭解一個離散型隨機變數的平均值之定義，並且能算出某個特定離散型隨機變數的平均值。</p> <p>P II 6.0 學生能瞭解離散型隨機變數的變異數，並且能算出某個特定離散型隨機變數的變異數。</p> <p>P II 7.0 學生能瞭解標準次數分配(standard distribution)（常態型、二項式型與指數型），並且能利用這樣的次數分配來解出這幾類的題目。</p> <p>P II 8.0 學生能算出常態隨機分配變數的平均數與標準差。</p> <p>P II 9.0 學生能瞭解中央極限定理，並且能用它求出在有限樣本空間中二項分配的大約機率值。</p> <p>P II 18.0 學生能從常態分配中進行簡單隨機抽樣，得到該統計資料的 P 值(抽樣比例值)。</p> <p>P II 19.0 學生能熟悉卡方分配（chi-square distribution）與卡方考驗（chi-square test），並且能瞭解它們的用法。</p>
------	--	--	-------	--

從以上表格比較發現：關於統計主題正式綱要和加州綱要有很大的不同，正式綱要國一與國二沒有安排統計與機率教材，該教材全部安排在國三（共 10 條），而其中有關機率主題只有兩條指標，而加州綱要在七年級之前就教完這些內容，之後八九年級，無論機率與統計都已經開始進入深入的題材與內容。

5. 數學分析

		正式綱要		加州綱要	
項目	年級	說明	年級	說明	



數列與級數	10	1.等差級數與等比級數：含數列與級數的基本概念。	8~12	A II 22.0 學生能找出等差級數、有限等比級數與無限等比級數的一般項以及總和。 A II 23.0 學生能導出等差級數的求和公式，以及有限等比級數與無限等比級數的總和公式。
	10	2.無窮等比級數與循環小數：介紹最基本的極限概念。		
	10	3.數學歸納法：介紹數學歸納法並應用於證明。	8~12	A II 21.0 學生能利用數學歸納法以證明有關正整數的一般化敘述。 M3.0 學生能利用數學歸納法以證明許多不同的公式。
多項式函數的極限與導數	12	1.函數及其圖形		2.0 學生能瞭解連續函數的定義與其在圖形上的意義。
	12	2.極限概念		1.0 學生能瞭解函數極限值之一般定義與在圖形上的意義。他們所要瞭解的知識包含單邊極限、無窮極限與無窮遠的極限。當定義域的變數趨近一個數或無窮時，學生能瞭解該函數的收斂與發散的定義。 1.1 學生能證明並利用定理求出函數的和、乘積、商與合成之極限。 1.2 學生能利用繪圖電腦來證實極限的存在，並估計其值。 1.3 學生能證明並利用特殊的極限，例如：當 $x$ 趨近於 0，求出 $(\sin(x))/x$ 與 $(1-\cos(x))/x$ 的極限值。 3.0 學生能瞭解並應用中間值定理與極值定理。
	12	3.割線與切線		
	12	4.導數與切線的斜率		4.0 學生能瞭解函數在某一點的導數定義，並瞭解可微分的觀念： 4.1 學生能瞭解函數的導數就是該函數圖形的切線斜率。 4.2 學生能瞭解導數可以解釋為瞬間的改變率，並且能利用導數來解決物理、化學、經濟及其他函數變率的各種不同問題。 4.3 學生能瞭解可微分與連續之間的關係。 4.4 學生能導出導數公式，並且能利用這些公式來求出下列個函數的導數，包括：代數函數、三角函數、反三角函數、指數函數、對數函數。

導函數的應用	12	1.函數圖形的描繪		9.0 學生能藉由微分的幫助以徒手畫出函數圖形，並且能求出極大值、及極小值、反曲點 (inflection points)，以及函數遞增與遞減的區間。
	12	2.函數的極值		
	12	3.三次函數的圖形		
	12	4.極值的應用		11.0 學生能利用微分以解決各種理論與應用情境(pure and applied contexts)的最佳化問題 (optimization, maximum-minimum problem) 12.0 學生能利用微分以解決各種理論與應用情境的相對比率問題。
多項式函數的積分	12	1.黎曼和與面積		5.0 學生能瞭解連鎖法則 (the chain rule) 及其證明，並能加以應用以求出各種合成函數的導數。 6.0 學生能求出參數型函數 (parametrically defined function) 之導數，並且將隱微分 (implicit differentiation) 應用在物理、化學、經濟等領域的各種問題。 7.0 學生能求出較高階的導數。 8.0 學生能瞭解並應用 Rolle 定理、中間值定理及 L' Hôpital (羅必達) 法則。
	12	2.求多項式函數圖形與直線 $x = a$ , $x = b$ , 和 $y = 0$ 圍出的面積		13.0 學生能使用黎曼和 (Riemann Sums)，以瞭解定積分的定義，也能利用這個定義來逼近積分值。 16.0 學生能利用定積分以解決面積、速度、加速度、物體的體積、旋轉表面積、曲線長度以及功(work)等問題。
	12	3.定積分及其應用		14.0 學生能應用積分的定義，將物理、經濟等等各領域的問題模式化，並以積分的方式求出解答。

			<p>17.0 學生能使用替換法 (substitution)、部分積分法及三角函數取代法 (trigonometric substitution) 等積分技巧，徒手算出各類函數的積分。在適合的時候，他們也能組合這些技巧。</p> <p>18.0 學生能瞭解反三角函數的定義與性質，並能以不定積分的方式表示這些函數。</p> <p>19.0 學生能利用課程標準 17.0 的技巧，結合代數的部分分式 (partial fraction) 與配方技巧，徒手求出有理函數的積分。</p> <p>20.0 學生能利用上述介紹過的技巧，求出三角函數的積分。</p> <p>21.0 學生能瞭解代數的辛普森法則 (Simpson's rule) 與牛頓法，並且能利用電算器、電腦或兩者以逼近積分值。</p> <p>22.0 學生能瞭解瑕積分 (improper integrals) 就是定積分的極限。</p> <p>23.0 學生能瞭解實數數列與實數級數這兩者的收斂與發散定義，藉由諸如比較考驗 (comparison test)、比率考驗 (ratio test) 及交錯級數考驗 (alternate series test)，他們能判斷一個級數是否收斂。</p> <p>24.0 學生能瞭解並且能算出冪級數的收斂半徑 (區間)。</p> <p>25.0 學生能對一個冪級數的各項進行微分與積分，以便由已知級數形成新級數。</p> <p>26.0 學生能計算基本函數的泰勒多項式 (Taylor polynomials) 與泰勒級數 (Taylor series)，包括餘項 (the remainder term) 的泰勒多項式與泰勒級數。</p> <p>27.0 學生能瞭解初級微分方程式的解題技巧，並且能應用到各種不同情境，包括消長問題。</p>
附錄	12	微積分基本定理	15.0 學生能瞭解與證明微積分基本定理，並且能利用這個定理，用反導數來解釋積分，將積分當作是反導數。
	12	牛頓法求平方根	10.0 學生能瞭解牛頓法 (Newton's method) 以逼近函數的 0 值。

## 附錄二、台灣與新加坡數學綱要比較表

「新加坡數學課程綱要」取自新加坡教育部網站，其所提供之部分為小學數學綱要 (Primary Mathematics Syllabus)、中一、中二數學綱要 (Lower Secondary Mathematics Syllabus)，即 1 ~ 8 年級。至於中三、中四 (部分學生讀中五，稱為 Higher Secondary School) 以及後期中等教育部份，詢問新加坡教育部人員得知其課程內容安排以考試綱要為依歸，可見得新加坡之教學內容與其階段性認證考試有著密不可分的關係。在以下的比較表中，台灣中小學部分根據 92 年九年一貫課程綱要 (數學學習領域)，而高中部分根據 95 年數學暫行綱要。

新加坡 1~8 年級數學課程內容分類			
年級	年級代號	主題	代號
國小 一 ~ 六年級	P1~P6	整數 (Whole Numbers)	N
		錢幣、測量 (Money, Measures & Mensuration)	M
		統計 (Statistics)	S
		幾何 (Geometry)	G
		分數 (Fractions)	F
		小數 (Decimals)	D
		平均、比率、速率 (Average/Rate/Speed)	A
		比、比例 (Ratio/Proportion)	R
		百分率 (Percentage)	P
		代數 (Algebra)	a
中學 一、 二年級	S1~S2	算術 (Arithmetic)	A
		面積與體積 (Mensuration)	M
		代數 (Algebra)	a
		繪圖 (Graph)	g
		幾何 (Geometry)	G
		統計 (Statistics)	S
		三角 (Trigonometry)	T

	問題解決 (Problem Solving)	P
--	------------------------	---

考試綱要的內容均為階段性概括描述，例如中學四年/五年階段結束後所接受的 O 級考試大綱 (GCE Mathematics O Level Syllabus)，初等學院二年 (後中等教育) 結束後所接受的 A 級考試大綱 (GCE Mathematics A Level Syllabus)，文中並未細緻地分年探討，單純以數學項目做分類，如函數繪圖、代數操作、三角。因此在這份綱要比較中，從 O 級考試大綱抽出 9 與 10 年級，主要是依據新加坡 2005 年市面上一般大眾使用的教科書來參考進而做年級分類；從 A 級考試大綱分出 11 與 12 年級，主要是參看 Meridian Junior College 的數學課程安排。於此所參照的教科書出版社為：小學—Federal，中學—Shinglee，高中—Pan Pacific。

綜而言之，在 10 ~ 12 年級部分，新加坡以其考試綱要來主導數學課程，10 年級涵蓋在 O 級考試綱要中，11 與 12 年級為參考 A 級考試綱要，主要取其科目代碼為 4017、4018、9233 三份考試綱要來與台灣 95 年高中暫行綱要做對照，詳細內容如下表格。而 9233 內容分為三部份：純數學、力學、機率與統計，此處對照只取其純數學與機率與統計兩部份。

考試綱要	涵蓋年級	科目代碼	綱要	內容分類	指標代號
O 級	7 8	4017	數學 (mathematics)	數學	4017
	9 10	4018	附加數學 (additional mathematics)	數學	4018
A 級		8174	數學 (mathematics)	純數學 (pure mathematics)	8174
				機率與統計 (probability and statistics)	
	11 12	9233	數學 (mathematics)	純數學 (pure mathematics)	33-P
				粒子力學 (particle mechanics)	33-M
				機率與統計 (probability and statistics)	33-S
		9234	進階數學 (further mathematics)	純數學 (pure mathematics)	34-P
力學 (mechanics)				34-M	
統計 (statistics)				34-S	

配合其公立學校 Meridian Junior College 的數學課程安排，對於 A 考試的三份數學綱要詳加說明如下：

1. GCE A0 Level Syllabus Mathematics **8174**

對象為文法商組學生，每週三節授課，二節演習。此課程為選修。內容包含純數學與機率統計。

2. GCE Advanced Level Syllabus Mathematics **9233**

對象為理工組學生，每週三節授課，三節演習；若中學未修習附加數學（additional mathematics）則為四節演習。此課程為必修。內容包含純數學、粒子力學與機率統計，整體而言較 8174 為廣，最明顯的部份是多了粒子力學這部份。

### 3. GCE Advanced Level Syllabus Further Mathematics 9234

對象為理工組學生，每週三節授課，三節演習。此課程為選修。內容包含純數學、力學與統計，整體而言較 9233 為深。

雖有三份綱要，不過 9233 綱要內容已涵蓋了 8174 綱要內容，而 9234 數學綱要為深度選修，提供給能力卓越的學生修習，因此底下表格部分，以 9233 數學綱要為主，擷取少部分 9234 數學綱要，與台灣 95 年數學暫行綱要做對照，並加上指標代號，方便查閱。

## 一、數與量

台灣綱要			新加坡綱要		
項目	年級	內容	年級	內容	
整數	正整數	1	100 以內的數 (N-1-01)	1	100 以內的數 (P1-N-1)
		2	1000 以內的數 (N-1-01)	2	1000 以內的數 (P2-N-1)
		3	10000 以內的數 (N-1-01)	3	10000 以內的數 (P3-N-1)
		4	億、兆 (N-1-01)	4	十萬以內的數 (P4-N-1)
			5	千萬以內的數 (P5-N-1)	
	大小與順序	1	能運用數表達多少、大小、順序 (N-1-01)	1	基數和序數 比較和排序 (P1-N-2)
		2	能用 $<$ 、 $=$ 與 $>$ 表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律 (N-1-01)	7	$=$ 、 $\neq$ 、 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$ 能正確的使用以上符號(包含數線的使用) (S1-A-1)
	負數	7	能以正、負表徵生活中相對的量，並認識負數是性質(方向、盈虧)的相反 (N-3-08)	7	操作正數、負數、和零，包含在數線上排序 (S1-A-11)
	四則運算	1	能理解加減法的意義，解決生活中的問題 (N-1-02)	1	說明加減的意義 100 以內的加減 完成二位數對個位、十位的加減心算 (P1-N-4)

		2	能熟練二位數加減直式計算 (N-1-02、N-1-05)	2	三位數以下之加減計算 完成三位數對個位、十位、百位的加減心算 (P2-N-2)
		2	能理解乘法的意義，使用 $\times$ 、 $=$ 作橫式紀錄，並解決生活中的問題 (N-1-03)	1	說明乘法的意義 相乘後不大於 40 (P1-N-5)

一、數與量(7-1)

整數	四則運算	2	能理解九九乘法 (N-1-06)	2	數字為 2、3、4、5、10 欄位的乘法表 (P2-N-3)
				3	10*10 乘法表 (P3-N-3)
		3	能熟練加減直式計算(四位數以內, 和 < 10000, 含多重借位) (N-1-02、N-1-05)	3	四位數以下之加減計算 完成兩位數的加減心算 (P3-N-3)
		3	能理解除法的意義, 運用 $\div$ 、 $=$ 作橫式紀錄(包括有餘數的情況), 並解決生活中的問題。(N-1-04)	1	使用除法符號 相除後不大於 20 (P1-N-5)
		3	能熟練三位數乘以一位數的直式計算, 並解決二位數乘以二位數的乘法問題。 能熟練三位數除以一位數的直式計算 (N-1-03、N-1-04、N-1-07)	4	三位數乘/除以一位數的計算 (P3-N-4)
					四位數乘/除以一位數的計算 (P4-N-4)
			5	三位數乘以二位數的計算 (P4-N-5)	
			5	四位數乘/除以二位數的計算 (P5-N-3)	
	7	能理解負數的特性並熟練數(含小數、分數)的四則運算(N-3-11)	7	小數、分數的四則運算 (S1-A-2)	
	奇數偶數		3	判別奇數與偶數 (P3-N-5)	
	因數倍數	5	能理解因數、倍數、公因數與公倍數。(N-2-04)	4	因數與倍數 (P4-N-3)
				7	使用公因數、公倍數 (S1-A-1)
	質數	6	能認識質數、合數, 並做質因數分解 (N-3-01)	7	使用質數 (S1-A-1)
		10	輾轉相除法		



一、數與量(7-2)

整數	10	數學歸納法	11	了解藉由歸納法完成證明的步驟。使用數學歸納法來建立一給定的結果，如有限級數之和，第 $n$ 次微分的形式。(33-P-1)		
			11	進階數學歸納法：在少數的實驗之後，推測一般結果並用歸納法證明。例如 $xe^x$ 的 $n$ 階導函數。(34-P-4)		
有理數	小數	3	7	判別有理數和無理數 (S1-A-11)		
			4	認識 3 位小數 (P4-D-1)		
		4	4	小數的比較及排序 (P4-D-2)		
			4	二位小數的加減運算 (P4-D-3)		
		分數	4	4	二位小數乘/除一位整數 (P4-D-4)	
				4	同分母加減運算 (分母小於 12) (N-1-09)	
			4	4	同分母加減運算 (P4-F-1)	
	4			真分數與整數的乘積 (P4-F-2)		
	5		4	假分數的整數倍計算，但不作帶分數的整數倍計算 (N-2-07)		
			5	假分數與帶分數的互換 (P4-F-3)		
	5		等值分數、約分、擴分的意義 (N-2-08)	3	辨認、說出等值分數，並學習從給予的分數中列出等值分數 (分母不大於 12) (P3-F-1)	
	5	5	5	異分母的比較與加減 (N-2-09)	3	比較與排序不等的分數 (分母不大於 12) (P3-F-2)
			4	能做分數與小數的互換，並標記在數線上 (N-2-13)	4	分數與小數的互換 (P4-D-5)
	5	5	能認識比率及其在生活中的應用 (含百分率、折)。(N-2-14)	7	分數與小數的互換並做比較與排序 (S1-A-2)	
5	5	小數、分數和百分率的轉換 (P5-P-1)				

一、數與量(7-3)

有理數	分數			6	表達百分率（給予兩數量）(P6-P-1)
				7	百分率和小數、分數的轉換 (S1-A-9)
	科學記號	7	能用以十為底的指數表達大數或小數（包括日常生活長度、重量、容積等單位，如奈米、微米、公分或厘米、公尺或米、…）(N-3-13)	8	使用標準形式 $A \times 10^n$ ， $n$ 為正、負整數且 $1 \leq A < 10$ (S2-A-2)
	比例	6 7	比、比值、正比、反比 (N-3-05)	5	說明 $a : b$ $a : b : c$ (P5-R-1)
				6	比與分數的互換 比、正比 (P6-R-1)
				7	比、正比、反比 (S1-A-8)
	量與實測	速率	6	能理解速度的概念與應用，認識速度的普遍單位及換算，並處理相關的計算問題。(N-3-06)	5
7					辨認和使用一般速率的測量(轉換 km/h 和 m/s)，解決速率的問題並計算平均速率 (S1-A-8)
9					實際情境之圖 簡易動力學：變化率的應用，包含「距離-時間」圖，「速率-時間」圖。從一線性「速率-時間」圖下的面積計算距離。(4017-12)
錢幣		1	認識 1 元、5 元、10 元、50 元等錢幣，並做 1 元與 10 元錢幣的換算 (N-1-01、N-1-02)	1	介紹「元」和「分」 針對元做加與減 針對分做加與減 (P1-M-3)

一、數與量(7-4)

量與實測	錢幣	2	認識 100 元、500 元等錢幣，並做 100 元與 500 元錢幣的換算 (N-1-01、N-1-02)	1	混合不同單位 - 元與分 - 做加與減 (P1-M-3)
	長度、容量、重量	1	能認識長度，並作直接比較 (N-1-14)	1	長度和重量的比較 (P1-M-1)
		2	能說明用不同個別單位測量相同長度，其數值不同 (N-1-15)	2 3	認識長度 (公里、公尺、公分)、重量 (公斤、公克)、體積 (公升、毫公升) 及其加減計算 (P2-M-1、P3-M-1)
		3	能使用日常測量工具進行實測活動，理解其單位和刻度結構，並解決同單位量的比較、加減與簡單整數倍的問題。 長度 (公尺、公分、毫米)、重量 (公斤、公克)、體積 (公升、毫公升) 的計算 (N-1-16)		
		3、4	重量 (公噸、公斤) 的計算 長度 (公里、公尺與公分、公分的關係) (N-2-15)		
		5	容量、容積和體積的關係 (N-2-18)		
	角度	3	能認識角，並比較大小 (N-1-14、N-1-15)	4	角度 (P4-G-2)
				5	對於直線與點，找出未知角度 (P5-G-1)
		4	會用量角器實測角度或畫出指定的角 (如:30 度、45 度、60 度、90 度、120 度、135 度、150 度) (N-1-16)	4	估計角的大小並用量角器測量角度 (P4-G-2)

一、數與量(7-5)

量與實測	面積、體積、周長	2	能認識面積，並作直接比較 (N-1-14)	3	認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並作相關計算 (P3-M-1)
		3	能利用間接比較或個別單位實測的方法比較不同面積的大小，並認識面積單位「平方公分」 (N-1-15)		
		4	能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並作相關計算。(N-2-15)		
		5	能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並作相關計算。(N-2-15、N-2-16)		
		4	能理解長方形和正方形的面積與周長公式 (N-2-17)	3	理解長方形和正方形的面積與周長 (P3-M-4、P3-M-5)
				7	計算長方形和正方形的周長與面積 (S1-A-7)
		4	能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較不同體積的大小，並認識體積單位「立方公分」 (N-1-15、N-1-16)	4	理解體積單位「立方公尺」，及「立方公分」、「立方公尺」間的關係，並作相關計算 (P4-M-3)
		5	能理解體積單位「立方公尺」，及「立方公分」、「立方公尺」間的關係，並作相關計算 (N-2-15、N-2-16)		
		5	能理解三角形、平行四邊形和梯形的面積公式 (N-2-19)	5	能理解三角形的面積公式 (P5-M-3)
				7	計算三角形、平行四邊形和梯形的周長與面積 (S1-A-7)

一、數與量(7-6)

量 與 實 測	面積、 體積、 周長	5	能理解長方體和正方體的體積公式 (N-2-17)	4 5	理解長方體和正方體、液體的容積計算 (P4-M-4、P5-M-2)
				7	解決長方體、正方體之體積與表面積問題 (S1-M-2)
		6	能理解簡單柱體的體積 (N-3-17)	7	解決角柱、圓柱之體積與表面積問題 (S1-M-2)
		8	能計算柱體表面積的問題 (S-4-04)	8	解決球體、三角錐、圓錐之體積與表面積問題 (S1-M-1)
	時間	1	能報讀日期與整點、半點的時刻 (N-1-13)	1	能報讀整點、半點的時刻 (P1-M-2)
				3	報讀時、分、秒，日、週、月、年 (P3-M-1)
		2	能報讀幾點幾分 (N-1-13)	2	能報讀時、分 使用 a.m. 和 p.m. (P2-M-3)
		3	認識日、時、分、秒的關係，並能作同單位時間量的加減計算 (N-1-13)	6	時間上 24 小時制與 12 小時制的轉換計算 (P6-A-1)
	4	能解決複名數的時間量計算，以及時刻與時間量的加減問題 (N-2-15)			
	圓面積、 圓周長	6	可由圓周長的實測理解圓周長與直徑成比例。能理解圓面積公式，並能計算簡單扇形面積 (N-3-16)	6	認識圓 (圓心、半徑、直徑、周長) 理解圓面積、周長公式 (P6-M-1)
				7	計算圓形的周長與面積 (S1-A-7)
				8	計算弧長和扇形面積 (S2-M-2)

一、數與量(7-7)

估算	2	認識公分、公尺，並能作相關的實測、估測與計算 (N-1-16、N-1-17)	1	長度、質量的測量 (P1-M-1)
	3	認識長度單位 (毫米、公分、公尺)、容量單位 (公升、毫升)、重量單位 (公斤、公克)，並能作相關的實測、估測與計算 (N-1-17)	2	認識長度 (公里、公尺、公分)、重量 (公斤、公克)、體積 (公升、毫公升) 及其測量 (P2-M-1)
	4	能用四捨五入法取概數，並作加、減之估算 (N-2-05)	4	能用四捨五入法取至整數、一位小數、兩位小數 (P4-D-6)
	5	能用四捨五入法對小數在指定位數取概數，並作估算 (N-2-05)	4	能用四捨五入法取至 1000，包含加、減、乘的估算 (P4-N-2、P5-N-2)
			7	能用四捨五入法取至指定的正確位數：包含小數位置、使用近似符號“ $\approx$ ” (S1-A-3)
	6	使用方格紙估算曲線所圍區域面積 (N-3-15)	7	數字的估算與測量：包含心算、使用估算來檢驗答案的合理性 (S1-A-3)
8	能認識二次方根及其近似值 (N-4-01)	7	求二次方根、三次立方根 (S1-A-5)	
數系	10	無理數	7	實數：整數，有理數與無理數。(S2-A-11)
	10	複數之四則運算 (介紹 $i$ 的由來，含一元二次方程式根的討論，特別是判別是小於0的情形)	11	完成複數 ( $x + iy$ ) 的加減乘除運算。(33-P-13)

## 二、代數（含樣式、關係、函數與坐標圖形）

台灣綱要			新加坡綱要	
項目	年級	說明	年級	說明
樣式			1	樣式 (pattern)：根據形狀、大小、顏色完成圖形 (P1-G-2)
			2	樣式 (pattern)：根據形狀、大小、方位或以上任兩個屬性完成圖形 (P2-G-2)
	8	能辨識具規則性的數列 (N-4-03)	7	辨識簡單的樣式圖案並描述其規則 (S1-A-6)
數學式與方程式的操作	2	能將具體情境中單步驟的加減問題列成算式填充題，並解釋式子與原問題情境的關係 (A-1-02)	2	解決包含四則運算的單步驟文字問題 (P2-N-4)
	3	能將具體情境中單步驟的乘、除問題列成算式填充題，並解釋式子與原問題情境的關係 (A-1-02)	3	解決包含四則運算的兩步驟文字問題 (P3-N-6)
			4	解決包含四則運算的三步驟文字問題 (P4-N-6)
	4	能用中文簡計式表示長方形和正方形的面積公式與周長公式 (A-2-05)	7	使用文字或字母來替代公式中的數字 (S1-a-1)
	5	能用中文簡計式表示長方體和正方體的體積公式 (A-2-05)		
	2	能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式，並能解釋式子與原問題情境的關係	1	$\square + 2 = 7$ $3 + \square = 12$ (P1-N-4)
	3	能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題，並嘗試解題及驗算其解 (A-1-02、A-2-03)		

二、代數(15-1)

數學式與方程式的操作	6	能使用 $x, y, \dots$ 等未知數符號，將具體情境中問題列成兩步驟的算式題，並嘗試解題及驗算其解 (A-3-03)	6	使用字母來表示未知數。 學習寫出包含一個未知數的簡單代數式並簡化之。 利用代數方式表達基本的算術過程。 (P6-a-1)
			8	操作簡單的代數分數 (1) $\frac{x}{3} + \frac{x-4}{2}$ (2) $\frac{2x}{3} - \frac{3(x-5)}{2}$ (3) $\left(\frac{3a}{4}\right)\left(\frac{5ab}{3}\right)$ (4) $\frac{3a}{4} \div \frac{9a}{10}$ (5) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3}$ (S2-a-1)
			8	求解簡單的分數方程式 (1) $\frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} = 3$ (2) $\frac{3}{x} = 6$ (3) $\frac{3}{x-2} = 6$ (S2-a-2)
數量間的變化與關係	1	能在具體情境中，認識加法的交換律、結合律，並運用於簡化計算 (A-1-03)	7	熟練四則運算與括號的使用：包含心算與估算，理解交換律、結合律、分配律 (S1-A-1)
	2	能在具體情境中，認識乘法的交換律，並運用於簡化計算 (A-1-03)		
	1	能在具體情境中，認識加減互逆 (A-1-04)		
	2	能理解加減互逆，並運用於驗算與解題 (A-1-04)		



二、代數(15-2)

數量間的變化與關係	3	能在具體情境中，認識乘除互逆 (A-1-05)		
	4	能理解乘除互逆，並運用於驗算與解題 (A-2-02)		
	4	能在具體情境中，理解乘法結合律、先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積 (A-2-01)		
	5	能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算 (A-2-03)		
	6	能理解等量公理 (A-3-02)		
一元一次方程式與不等式	6	能在比例的情境或幾何公式中，透過列表的方式認識變數 (A-3-07)		
	7	<p>能嘗試以代入法或列舉法求一次方程式的解，並檢驗解的合理性</p> <p>能熟練符號的代數操作</p> <p>能認識變數與函數</p> <p>能舉出例子，說明一次函數是一種特殊的比例對應關係 (A-3-07)</p>	7	簡單的代數操作 (蒐集同類項、移除括號) (S1-a-2)

二、代數(15-3)

一元一次方程式與不等式	7	能由具體情境中列出一元一次方程式，並理解其解的意義	7	簡單的線性方程式問題（係數包含分數、小數） Ex. $\frac{1}{2}x + 5 = x - \frac{1}{3}$ $2 + 0.6x = 2x$ (S1-a-3)
		能以等量公理來解一元一次方程式，並做驗算		
		能以移項法則來解一元一次方程式，並做驗算 (A-3-08)		
二元一次方程式與不等式	7	能由具體情境中列出一元一次不等式	9	解簡單的線性不等式 (4017-18)
		能利用移項法則在數線上找出一元一次不等式的解		
		能由具體情境中描述一元一次式解的意義 (A-3-09)		
二元一次方程式與不等式	7	能由具體情境中列出二元一次聯立方程式，並理解其解的意義	8	使用繪圖方法來解線性聯立不等式。解二元一次聯立方程式及其應用問題。(S2-g-1)
		能在直角坐標平面上認識解二元一次聯立方程式的解		
		能熟練使用消去法解二元一次聯立方程式 (A-3-13)	9	從圖形上解釋並獲取直線方程式，如 $y = mx + c$ (4017-14)
	11	線性聯立方程式	8	線性聯立方程式 (S2-a-2)
10	方程式解的意義(交點)	11	線性聯立方程式 (33-P-1)	

二、代數(15-4)

因式分解與二次方程式		8	能理解因式、倍式、公因式與因式分解的意義	8	做因式分解： $ax + ay$ $ax + bx + kay + kby$ $a^2x^2 - b^2y^2$ (S2-a-1) $a^2 \pm 2ab + b^2$ $ax^2 + bx + c$	
			能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解 (A-4-04)		8	藉由因式分解來解二次方程式 (S2-a-2)
			能利用提出公因式與分組分解法分解二次多項式		9	藉由因式分解、公式與完成平方來解二次方程式。(4017-18)
					9	找出多項式的因式 解三次方程式 (4018-18)
函數圖形	一次函數圖形	7	能運用直角坐標系來標定位置	8	能在直角坐標平面上描繪一次函數、二次函數的圖形	
			能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形		使用繪圖方式來求解線性聯立方程式	
			能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形		從練習情境中的資料來繪圖 (S2-g-1、S2-g-2)	
			能在直角坐標平面上認識解二元一次聯立方程式的解 (A-3-11、A-3-12)	10	二維笛卡兒坐標的熟悉度。 計算坐標上連接兩點所成直線之斜率。 從圖型上解釋並獲取直線方程式，如 $y = mx + c$ 計算一直線段的中點坐標與其兩端終點的距離。(4017-14)	

二、代數(15-5)

函數圖形	二次函數圖形	9	能理解二次函數的樣式並繪出其圖形	8	配方法 (4017-18)
			能利用配方法繪出二次函數的圖形	9	使用 $f(x)$ 的極值來繪圖，從所給予的定義域來決定值域。 $f(x)=0$ : (i)兩實根 (ii)兩等根 (iii)無實根 給予一直線討論其 (i)與曲線相交 (ii)與曲線相切 (iii)與曲線不相交  用任何方法找出二次函數 $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ 的極大極小值 解二次方程式的實根，找出二次不等式的解集。(4018-3)
		能計算二次函數的最大值與最小值			
			能應用二次函數最大值與最小值的簡單性質 (A-4-06)		
			能理解二次函數的圖形與拋物線的概念		
			能理解拋物線的線對稱性質 (A-4-07)		
基本函數	斜率	10		9 10	找出直線圖的斜率。 利用圖形法 (graphical method) 概略地解方程式。 藉由繪製切線來估計曲線之斜率。(4017-13)
	指數與對數函數	10	指數函數與對數函數	9	建一 $x, y$ 值表並繪製「 $y = ax^n$ 」, $n=-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 」,「 $y = ka^x$ 」, $a$ 是正數」。 解釋一次函數、二次函數、指數函數。(4017-13)
				9	簡單的指數運算，有理化分母。(4018-4)

二、代數(15-6)

基本函數	指數與對數函數			10	1. 認識對數和指數函數的簡單性質和繪圖。 2. 認識對數律（包含底數的變換） 3. 解 $a^x = b$ (4018-7)
				11	複習並使用對數律（包含換底），繪製簡單的對數函數與指數函數圖。(33-P-4)
				11	1. 複習並使用此定義 $a^x = e^{x \ln a}$ 2. 使用對數來解方程式，化成此型式 $a^x = b$ (33-P-4)
	多項式函數	10	多項式函數（含一次、二次多項式函數的圖形）	11	多項式和有理函數： 1. 使用二次、三次、四次多項方程式根與係數的關係。 2. 用一給定之簡單替換來求得一方程式，其根與原方程式有關。 3. 描繪簡單的有理函數與漸近線。(34-P-1)
弧度量		10	廣義角與弧度量(radian)	8	解弧長與扇形面積問題，包含弧度量測量的知識與使用。(4018-9)
三角				8	三角比：sine、cosine、tangent (S2-T-2)
				10	拓展 sin 和 cos 的角度：90 度 ~ 180 度。(4017-26)
				10	1. 了解三角函數之週期性與兩圖之間的關係：如 $\sin x$ 與 $\sin 2x$ (4018-10)
				11	使用 sin 和 cos 公式。(33-P-7)

二、代數(15-7)

三角	10	特殊角的三角函數值 三角函數	<p>三角函數：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 了解六個三角函數之定義，角度為任意大。</li> <li>2. 複習並使用三角函數關於 <math>30^\circ, 45^\circ,</math> 和 <math>60^\circ</math> 的確切值，如 <math>\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}</math></li> <li>3. 使用 <math>\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x</math> 記號來表示反三角的主值 (principal values)。</li> <li>4. sine、cosine 和 tangent 函數圖的週期性與對稱性，並使用此概念來討論其反函數。</li> <li>5. 使用三角本身表示簡化或精確值，並熟悉以下式子的使用：</li> </ol>
三角	10	三角函數之關係	<p>使用</p> $\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A, \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A,$ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$ $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$ $\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$ <p>(4018-10)</p>
	10	三角函數定理(正/餘弦)	<p>對任意三角形使用 <math>\sin</math> 和 <math>\cos</math> 的規則與三角形面積公式 <math>\frac{1}{2}ab \sin C</math> 來解決問題。(4017-26)</p>

二、代數(15-8)

三角	10	特殊角的三角比 三角函數	11	$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta,$ $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta,$ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\sin(A \pm B),$ $\cos(A \pm B),$ $\tan(A \pm B)$ 之展開 公式： $\sin 2A, \cos 2A, \tan 2A$ 公式： $\sin A \pm \sin B,$ $\cos A \pm \cos B$ 以 $R \cos(\theta \pm \alpha)$ 和 $R \sin(\theta \pm \alpha)$ 表示 $a \cos \theta + b \sin \theta$ 6. 找出簡單的三角方程式一般解，包含圖示說明。
			9	解三維中簡單的三角問題。(4017-26)
	10	多項式乘法	8	多項式乘法 (S2-a-2)
多項式	10	多項式長除法	8	多項式長除法 (S2-a-2)
	10	多項式綜合除法		
	10	餘式與因式定理	10	使用餘式和因式定理 (4018-5)
	10	因式分解	11	找出多項式的因式 解三次方程式 (4018-5)
	10	公因式、公倍式，用輾轉相除法求最高公因式。	8	使用公因式、公倍式 (S2-a-1)
	10	代數基本定理		

二、代數(15-9)

多項式	10	共軛複根	11	<p>1. 了解複數的概念，複習「實部」、「虛部」、「模」、「幅角」、「共軛」，若兩複數相等，則其實部與虛部相等，反之亦然。</p> <p>2. 複習並使用此關係 <math>zz^* =  z ^2</math></p> <p>1. 實係數之多項式方程式，任何非實根皆成對出現。(33-P-13)</p>
	10	勘根定理		
函數性質與運算	10	值域與定義域	10 11	了解函數、定義域、值域。(4018-2、33-P-1)
	10	合成函數(平移)	10	合成函數(4018-2)
	10	指數與對數互為反函數的意義以公式直接表達，不一定要提反函數這三個字，但要在坐標平面上同時呈現這兩個函數的圖形。	11	找出合成函數和反函數，包含它們存在的條件。了解並適當的使用關係式 $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$ (33-P-1)
			11	以圖項說明一對一函數和其反函數之間的關係(33-P-1)
			11	了解圖和代數方程式之間的關係，並特別熟悉以下形式的繪圖： $y = kx^n$ ， $n$ 是正整數、負整數或簡單的有理數 $ax + by = c, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (圓錐曲線的幾何性質知識並不被要求)(33-P-1)
			10	了解 $y = f(x)$ 和 $y =  f(x) $ 之間的關係，其中 $f(x)$ 為一次、二次多項式或三角函數。(4018-2)
			10	轉換： 使用平面上的轉換：反射、旋轉、平移、放大、縮減、延伸，與其結合。 從圖形精確描述其轉換。(4017-29)



二、代數(15-10)

函數性質與運算			11	了解並使用以下函數圖形的關係： $y = f(x)$ $y = af(x)$ $y = f(x) + a$ $y = f(x + a)$ $y = f(ax)$ $a$ 是常數 描述在平移、反射、比例上的變化。 (33-P-1)
			11	敘述方程式圖形的對稱性。(33-P-1)
			11	在參數上，了解並使用簡單的例子：曲線上點坐標的描述。(33-P-1)
			11	$y = f(x)$ , 1. 了解 $y^2 = f(x)$ 和 $y =  f(x) $ 函數圖彼此間的關係。 2. 在簡單例子中，決定平行於軸之漸進線方程式。 3. 描繪 $y = f(x)$ , $y^2 = f(x)$ 和 $y =  f(x) $ 之曲線圖。(不要求詳細描繪，但要表達出其重要特徵，如轉折點、漸進線、和軸相交之處) 33-P-14
線性代數	11	解的算法(克拉瑪、高斯消去法)	8	一次、二次方程式的繪圖 (S2-g-1)
			11	解的算法(高斯消去法) (34-P-15)

二、代數(15-11)

線性代數	12	行列式值 行列式性質(列運算、cofactor 降階) 行列式與面積/體積 矩陣表達式 反矩陣(2*2、3*3) 矩陣的維度 矩陣的加減法運算 矩陣的純量積 矩陣的乘法運算 矩陣的列運算 增廣矩陣	11	求方陣的行列式，找出非奇異矩陣 ( non-singular matrix ) ( 只探討 $2 \times 2, 3 \times 3$ 矩陣) 的反矩陣，複習一方陣的行 ( 或列) 是獨立的若且為若 ( if and only if ) 行列式為非零。(34-P-9)
圓錐曲線	11	圓錐曲線的名詞由來，拋物線，橢圓，雙曲線，圓錐曲線的光學性質。		
不等式	12	柯西不等式		
	12	算幾不等式		
	12	一元多項式不等式之解區間	11	找出不等式的解，此不等式可化到此型式： $f(x) > 0$ ， $f(x)$ 可分解，並透過圖示說明其解。(33-P-3)
	12	含絕對值的不等式之解區間	11	1. 了解 $ x $ 的意義並且概略描繪函數 $y =  ax + b $ 的圖。 在解方程式與不等式的課程中使用關係式，如： $ x - a  < b \Leftrightarrow a - b < x < a + b$ $ a  =  b  \Leftrightarrow a^2 = b^2$ (33-P-3)

二、代數(15-12)

方位			5	說出（指南針上）八個方位（P5-G-2）
			9	方位（bearings） 順時鐘從北開始（ $000^\circ - 360^\circ$ ），解釋並使用三圖方位（three-figure bearings）測量，計算角度。（4017-21）
	10	複數與直角坐標	11 12	1. 用亞根圖（Argand diagram）呈現幾何上的複數。 2. 說明以亞根圖（Argand diagram）之軌跡呈現複數的簡單方程式與不等式。如 $ z - a  < k$ , $ z - a  =  z - b $ , $\arg(z - a) = \alpha$ , 但不包含（33-P-13） $\arg(z - a) - \arg(z - b) = Y$
坐標與向量	10	複數之極式	11 12	完成複數極式（ $r(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta}$ ）的乘除運算。（33-P-13）
	10	極坐標	11 12	極坐標： 了解笛卡兒坐標與及坐標之關係，並將曲線方程式做兩者間之轉換。 描繪簡單的極坐標曲線圖，範圍為 $0 \leq \theta < 2\pi$ 或 $-\pi < \theta \leq \pi$ 。 在簡單例子中使用扇形面積公式 $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ （34-P-2）

二、代數(15-13)

坐標與向量	10	棣美弗定理及 1 的 n 次方根	11	<ol style="list-style-type: none"> <li>對正整指數 ( positive integral exponent )，運用複數乘法在幾何上的結果，了解棣美弗定理( de Moivre' s theorem )。</li> <li>對正整指數，證明棣美弗定理。</li> <li>對正整指數，使用棣美弗定理，在主幅角三角比的次方上來陳述倍角的三角比。</li> <li>對正負有理指數使用棣美弗定理：在倍角上陳述 <math>\sin \theta</math> 和 <math>\cos \theta</math> 的次方級數之和找出 1 的 n 次方根 (34-P-7)</li> </ol>
	11	向量運算(加、減、合成、平行、長度、純量乘)	10 11	完成向量的加減和純量積運算，並在幾何上說明此運算。(33-P-11)
	11	向量應用於平面幾何	10	<ol style="list-style-type: none"> <li>使用向量 <math>\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}</math>, <math>\overrightarrow{AB}</math>, <math>a</math> 描述平移。</li> <li>計算 <math>\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}</math> 向量的大小 <math>\sqrt{x^2 + y^2}</math>。</li> <li>用線段呈現向量</li> <li>在共面向量上，使用兩向量的加減來描述所給予的向量。</li> <li>使用位置向量 (4017-30)</li> </ol>
			11	使用平面方程式 $ax + by + cz = d$ 或 $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ (34-P-8) 或 $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$ 並做彼此間的轉換。
			11	使用單位向量、位置向量和位移向量。(33-P-11)
			11	使用直角坐標系標定三維空間中的點，並使用標準的向量記號 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , $\overrightarrow{AB}$ (33-P-11)

二、代數(15-14)

坐標與向量	11	直線參數式	11	當直線方程式表示為 $r = a + tb$ 和 $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ ，了解所有記號使用的意義，並將直線方程式做向量與笛卡兒型式之間的轉換。(33-P-11)
	11	空間中直線方程式（點線距離）	11	使用直線方程式來解決關於距離、角度、相交和其他特殊問題。(33-P-11)
			10	軌跡（locus） 使用以下的軌跡和相交軌跡的方法 (a) 二維中的點集 (i) 從一定點與固定的距離描繪出軌跡(ii) 從一固定的直線與固定的距離描繪出軌跡(iii) 描繪出與兩定點等距的軌跡 (b) 與兩相交直線等距的點集 (4017-24)
	11	內積的應用	11	使用內積來決定兩向量的角度，並求解關於向量垂直的問題。(33-P-11)
	11	垂直投影、夾角		
	11	向量內積	11	複習向量長度計算的定義，兩向量的內積。(33-P-11)
			11	向量外積 向量乘法 $a \times b$ 可以表為 $ a  b \sin \theta \vec{n}$ ， $\vec{n}$ 是單位向量， 或 $(a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$ (34-P-8)
	11	平面夾角	11	計算線和平面間的角度、兩平面間的角度、簡單例子中兩斜線的角度。(33-P-7)

二、代數(15-15)

坐標與向量	11	直線與平面方程式 點面距離	11	1. 使用直線和平面方程式來解決關於距離、角度和相交的問題，包含： a. 決定一直線是否在平面上，或與平面平行、相交，並找出交點。 b. 找出點到面的距離。 c. 找出線與平面和兩平面的夾角。 d. 找出兩平面相交得出的直線方程式。(34-P-8)
	11	兩線距離 (平行線、歪斜線)	11	決定兩線是否平行、相交或歪斜，找出兩線相交的交點，找出點到線的垂直距離，找出兩線所夾之角。(33-P-11)
			11	計算兩歪斜線的距離 找出垂直於兩歪斜線的方程式(34-P-8)
				11

### 三、圖形與幾何

台灣綱要			新加坡綱要	
項目	年級	說明	年級	說明
辨識、描述與定義幾何形體	1	能辨認、分類簡單平面圖形與立體形體 (S-1-01)	1	能辨認、指稱、分類簡單平面圖形 (長方形、正方形、圓形、三角形) 與立體形體 (P1-G-1)
			2	能辨認與指稱半圓、1/4 圓 (P2-G-1)
	2	能認識周遭物體中的角、直線和平面 (S-1-03)		
	2	能認識生活周遭中水平、鉛直、平行與垂直的現象 (S-1-07)	4	使用直尺、三角板繪製垂直線、平行線 (P4-G-1)
			2	辨認直線與曲線 辨認 3-D 物體的平面與曲面 (P2-G-3)
	1	能描述某物在觀察者的前後、左右、上下及兩個物體的遠近位置 (S-1-06)		
	4	能運用角、邊等構成要素，辨認簡單平面圖形 (S-2-01)	3	角的概念：辨識直角、判別給予的角是大於或小於直角 (P3-G-1)
			4	估算角度大小，並利用量角器測量 (P4-G-1)
		能理解垂直與平行的意義 (S-2-02)	4	辨認與繪製垂直線、平行線，並利用直尺與三角板繪製 (P4-G-1)
	4 5	能透過操作，認識基本三角形與四邊形的性質 (S-2-03)	4	描述與使用正方形、長方形的性質 (P4-G-5)
能透過操作，理解三角形內角和為 180 度，任兩邊和大於第三邊 (S-2-03)		5	認識、使用三角形內角和為 180 度之性質，一外角等於另兩內角之和 (P5-G-3)	

三、圖形與幾何(3-1)

辨識、描述與定義幾何形體	5	能判斷一圖形是否滿足線對稱，並找出該圖形的對稱軸（可能不止一條）。理解哪些常見平面圖形具有線對稱的性質	4	辨認對稱圖形、決定是否直線是一個圖形的對稱線、根據所給予的線對稱圖形去完成對稱圖（P4-G-3）
			8	辨認平面上的線對稱與旋轉對稱（S2-G-5）
		知道線對稱圖形的對應邊相等、對應角相等，並知道對稱軸兩側圖形全等  知道如何描繪一簡單平面圖形的線對稱圖形（S-2-06）	9	使用以下關於圓的對稱性質： (a) 等長的弦至圓心的距離相等。 (b) 二等分弦的垂線會通過圓心。 (c) 外點的兩切線等長（4017-22）
	6	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題（例如由三角形的內角和推知四邊形的內角和）（S-3-01）		
	6	能認識直圓錐、直圓柱與直角柱（S-3-05）	7	識別立方體、長方體、角柱、圓柱、三角錐、圓錐、球體（S1-G-2）
	8	能理解長方體、正方體、正角錐、正角柱、圓錐、圓柱等立體的基本展開圖（S-4-01）	6	長方體、正方體、柱體、三角錐等立體的基本展開圖（S6-G-3）
		能辨別柱體的展開圖（S-4-04）		
	8	能明確定義幾何圖形（三角形、四邊形、多邊形及圓形）及幾何圖形的點、線、角（S-4-01）	4	辨認、命名以下圖形：長方形、正方形、平行四邊形、菱形、梯形（P4-G-4）
				辨認並使用正方形與長方形的性質（P4-G-5）
			5	描述、找出以下圖形的未知角度：平行四邊形、菱形、梯形（P5-G-3）



三、圖形與幾何(3-2)

辨識、描述與定義幾何形體			7	識別平面圖形 <u>三角形</u> ：等腰、等邊、直角、銳角、鈍角、不等邊三角形 <u>特殊四邊形</u> ：長方形、正方形、平行四邊形、菱形、梯形、鳶形 <u>多邊形</u> ：五、六、八、十角形 (S1-G-1)
	8	能利用三角形內角和為 180 度的性質解決多邊形內角和、與外角和定理的問題 (S-4-09)	8	多邊形的內角和、外角和，並計算未知角度 (S2-G-3)
	8	能以最少性質辨認三角形，並能理解特殊三角形 (如正三角形、等腰三角形) 的定義及性質 (S-4-08)	4 5	辨認、命名以下三角形：等腰、等邊、直角三角形 (P4-G-4) 描述、找出以下三角形的未知角度：等腰、等邊、直角三角形 (P5-G-3)
全等	4	能以對應頂點、對應角、對應邊的關係來描述全等的意義 (S-2-04)		
	4	能認識平面圖形全等的意義 (S-2-04)	8	認識相似與全等圖形 (S2-G-2)
	8	能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義，並能理解三角形的全等性質 (SSS、SAS、ASA、AAS 及 RHS 全等性質) (S-4-08)	9	SSS、SAS、ASA、AAS 及 RHS 全等性質 (S2-G-2)
尺規作圖	8	能認識尺規作圖，並能熟練基本尺規作圖 (例如：平分線段、角平分線、垂直線、中垂線、平行線) 能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義 (S-4-07)	7	繪製線段、角、平行線、垂直線、角平分線、中垂線 (S1-G-4)
相似	6	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響 (S-3-02)	8	平面圖形的反射、旋轉、移動、與放大 (S2-G-1)

三、圖形與幾何(3-3)

相似	9	能對簡單的相似多邊形指出對應邊成比例、對應角相等性質 (S-4-12)	8	找出相似(全等)圖形未知的邊、角(S2-G-2)
	9	能理解三角形的相似性質 平行線截比例線段性質 利用相似三角形對應邊成比例的觀念，應用在實際物的測量 (S-4-13)	9	使用相似三角形面積間的關係，相似物體間體積的擴展。(4017-19)
幾何證明	8	能理解勾股定理 能由簡單面積計算導出勾股定理 (S-4-05) 能理解勾股定理的應用	8	描述畢氏定理 (S2-T-1)
	8	能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同 (S-4-10)		
	9	能根據平行線截線性質作推理 (S-4-11、S-4-15)		
	9	能理解三角形外心、內心和重心的定義和相關性質 以三角形和圓的性質為題材來學習推理 (S-4-15)		
			9	切線與圓半徑間的角度 圓心角是圓周角的兩倍 對同弦的圓心、圓周角相等 圓上之一弦，連接弦兩端與圓周一點，分別位於弦兩邊的角度互為補角。(4017-23)

#### 四、集合、邏輯、排列組合與機率統計

台灣綱要			新加坡綱要	
項目	年級	說明	年級	說明
集合、邏輯	11	集合記號 {列舉} {性質}	10	1. 使用集合語言、記號、凡氏圖 (Venn diagrams) 來描述集合並呈現集合彼此間的關係，如： $A = \{x: x \text{ 是自然數}\}$ $B = \{(x, y): y = mx + c\}$ $C = \{x: a \leq x \leq b\}$ $D = \{a, b, c, \dots\}$
				2. 了解並使用以下符號 $A \cup B$ $A \cap B$ $n(A): \text{集合} A \text{ 的元素個數}$ $\in$ $\notin$ $A': \text{集合} A \text{ 的補集} \quad (4018-1)$ $\Phi: \text{空集合}$ $\mu: \text{全集 (universal set)}$ $A \subseteq B$ $A \subset B$ $A \not\subset B$
收集與整理資料	1	能對生活中的事件或活動做初步的分類與紀錄 能將紀錄以統計表呈現並說明 (D-1-01)	1	蒐集、組織資料，使用水平、垂直模式、符號表示繪圖。學習建構、閱讀、和說明。(P1-S-1)
			2	使用尺度繪圖，學習解決問題 (P2-S-1)
	4	能報讀生活中資料的統計圖，如長條圖、折線圖與圓形圖等 (D-2-01)	3 4	繪製、報讀、說明表格與長條圖，並解決問題 (P3-S-1、P4-S-1、P4-S-2)
			5	報讀、說明折線圖，並解決問題 (P5-S-1)
			6	報讀、說明圓形圖，並解決問題 (P6-S-1)

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-1)

收集與整理資料	4	能報讀較複雜的長條圖 (D-2-02)	7	資料處理： 蒐集、分類、和製表， 報讀和解釋資料表和統計圖。 繪製數字圖表、點圖、長條圖、折線圖、 圓形圖、莖葉圖、直方圖 (S1-S-1)
	5	能整理生活中的資料，並繪製成長條圖 (D-2-03)		
	5	能整理有序資料，並製成折線圖 (D-2-04)		
	6	能整理生活中的資料，並繪製成圓形圖 (D-3-01)		
	9	能理解百分位數概念，並製作盒狀圖 (D-4-01)		
			9	使用次數密度來建立和閱讀「等距與不等距的直方圖」。(4017-27)
	3	能報讀生活中常見的直接對應(一維)表格 (D-1-02)		
	11	抽樣方法	12	簡要說明為何一給定的取樣法也許不符合要求。(33-S-4)
二維資料呈現	3	能報讀生活中常見的交叉對應(二維)表格 (D-1-03)		
	5	能報讀生活中有序資料的統計圖 (D-2-04)		
	12	散佈圖(二元)	12	了解最小平方、散佈圖之迴歸線和相關性 (correlation) 的概念。(34-S-9) 解釋散佈圖積矩相關係數 (特別是此係數逼近於 +1, -1, 0 的例子) 之值。(34-S-9)
基本統計量	9	能認識平均數、中位數與眾數均可以某種程度地表示整筆資料集中的位置 能認識平均數、中位數與眾數在不同狀況下，被使用的需求度有些微的差異 (D-4-02)	8	能辨識平均數、中位數與眾數在不同狀況下，被使用的意圖 (S2-S-1)

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-2)

基本統計量	9	能認識全距，並理解全距大小的意義  能認識第 1、2、3 四分位數，及四分位數 (D-4-03)		
	11 12	期望值與標準差	12	計算 $E(X)$ 和 $Var(X)$ (33-S-2)
	12	相關係數 (二元) 迴歸直線	12	雙變量資料 1. 從簡單的列資料和總結的資料迴歸線方程式和積矩相關係數 (product moment correlation coefficient) 做計算。 2. 使用通過平均值中心 (mean centre) 迴歸線、積矩相關係數 $r$ 、與 $r^2 = b_1 b_2$ 的迴歸係數 $b_1, b_2$ 之事實。 3. 在問題中使用適當的迴歸直線來估計一個值。 4. 完成積矩相關係數的假設考驗 (34-S-9)
	11	信賴區間與信心水準的解讀	12	假設檢定： 1. 了解假設 (虛無與對立) 檢定統計的概念 (單尾與雙尾)。 2. 用公式表示假設，並應用關於母體均值 (population mean) 使用的假設檢定。 3. 用公式表示母體比例的假設，使用常態逼近二項分配的假設檢定來應用假設檢定。(33-S-7)
排列組合	11	加法/乘法原理 排容原理	10	加法、乘法原理 使用適合的可能圖 (possibility diagrams) 與樹狀圖，計算簡單結合事件的機率。(4017-28)

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-3)

排列組合	11	階乘與排列	10 11	了解「排列」與「組合」 了解安排(arranging)問題,包含:重複(例:排英文字 NEEDLESS 的方法數),限制(例:幾個人站成一排,其中兩個人「必須」或者「必須不」相鄰的方法數)(4018-11、33-P-6)
	11	組合	10 11	認識並使用 $n!$ 記號 ( $0! = 1$ ) 和 $\binom{n}{r}$ (4018-11、33-P-5)
	11	組合之應用(巴斯卡三角、二項展開)	10	使用二項式定理展開 $(a+b)^n$ , $n$ 是正整數。 使用 $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r, 0 \leq r \leq n$ (4018-12)
	11	遞迴關係數列		
			11	使用二項式定理展開 $(1+x)^n$ , $n$ 是正整數。並複習 $ x  < 1$ 情況,展開後的正確性。(33-P-5)
機率與統計	9	能以具體情境介紹機率的觀念 能進行簡單的實驗以了解抽樣的不確定性、隨機性質等初步概念(D-4-04)		
	11	樣本空間	12	了解樣本(sample)與母體(population)的區別,認識選擇樣本上的隨機性。(33-S-4)
	11	事件	10	計算單一事件的機率,以分數或小數表示。(4017-28)
			12	了解離散隨機變數的觀念(33-S-2)

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-4)

機 率 與 統 計			<p>樣本平均數可被視為一隨機變數，使用</p> $E(\bar{X}) = \mu, \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ <p>若 X 是常態分配，則 <math>\bar{X}</math> 是常態分配。 使用中央極限定理（不需證明）。 從樣本來計算母體均值與母體變異數的不偏估計。 從已知變異數之常態分配樣本、或大型樣本來決定母體均值之信賴區間。(33-S-4)</p>
			<p>1. 隨機變數之線性結合</p> $E(aX + b) = aE(x),$ $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(x),$ $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y),$ $\text{Var}(aX + bY)$ $= a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y),$ <p>X 和 Y 為獨立</p> <p>2. 若 X 有一常態分配，則 aX + b 也有。</p> <p>3. 若 X 和 Y 有獨立常態分配，則 aX + bY 也有。</p> <p>4. 若 X 和 Y 有獨立卜瓦松分配，則 X + Y 也有。</p> <p>(33-S-5)</p>
			<p>連續隨機變數：</p> <p>1. 了解機率密度函數，並使用密度函數之機率。</p> <p>2. 使用給定的機率密度函數來計算一分配之平均值、眾數和變異數，在簡單例子中使用 <math>E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx</math>，其中 f(x)是機率密度函數，g(x)是 X 之函數</p> <p>3. 了解與使用機率密度函數與分配函數之間的關係，並求中位數、四分位數和其他分段值。</p> <p>4. 在一模型中使用機率密度函數或分配函數，包含特殊的連續均勻分配。(33-S-6)</p>

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-5)

機率與統計	11	機率性質	12	<p>在簡單例子中使用機率的加與乘運算，並了解樹枝狀圖所呈現的事件。</p> <p>了解以下記號：</p> $P(A), P(A \cup B),$ $P(A \cap B), P(A   B),$ $P(A \cup B)$ $= P(A) + P(B) - P(A \cap B),$ $P(A \cap B)$ $= P(A) P(B   A) = P(B) P(A   B)$ <p>(不要求貝氏定理)(33-S-1)</p>
	11	亂數產生器(表)		
	12	常態分配	12	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 常態曲線的一般形狀，了解 <math>\mu, \sigma^2</math> 如何影響 <math>N(\mu, \sigma^2)</math> 此分配之形狀與位置。</li> <li>2. 對正常變量 (normal variable) 做標準化，使用常態分配表。</li> <li>3. 使用常態分配作為一機率模型，並解決關於參數 <math>X \sim N(\mu, \sigma^2)</math> 的問題。包含給定 <math>x_1, \mu, \sigma^2</math> 找出 <math>P(X &lt; x_1)</math> 的值；給定 <math>P(X &lt; x_1)</math> 的值，使用常態分配的對稱性找出 <math>x_1, \mu, \sigma^2</math> 之間的關係。反複練習以上的應用。(33-S-3)</li> </ol>
	12	獨立事件	12	了解互斥和獨立事件的意義，在簡單例子中計算與使用條件機率。(33-S-1)
	12	條件機率	12	<p>了解以下記號：</p> $P(A   B),$ $P(A \cap B) \quad (33-S-1)$ $= P(A) P(B   A) = P(B) P(A   B)$
	12	貝式定理		



四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-6)

機率與統計	12	二項分配	12	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 使用常態分配下的條件來逼近二項分配 (<math>n</math> 夠大來保證 <math>np &gt; 5</math> 且 <math>nq &gt; 5</math>) 或卜瓦松分配 (<math>\mu &gt; 10</math>)，並計算此逼近。</li> <li>2. 領會均勻分配或二項分配 <math>B(n,p)</math>，使用二項機率的計算公式。</li> <li>3. 了解卜瓦松分配，複習卜瓦松的機率計算公式。</li> <li>4. 使用二項分配與卜瓦松分配之平均值與變異數。</li> <li>5. 使用卜瓦松分配逼近二項分配。(33-S-2、33-S-3)</li> </ol>
-------	----	------	----	--

五、數學分析

台灣綱要			新加坡綱要	
項目	年級	說明	年級	說明
無窮與極限	10	數列一般式	11	了解數列中項的概念，使用 $u_n$ 來表示數列的第 $n$ 項。(33-P-5)
	10	$\Sigma$ 符號	11	使用 $\Sigma$ 符號 (33-P-5)
	10	等差級數有限和	11	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 識別等差級數和等比級數。</li> <li>2. 求 <math>\sum r</math>, <math>\sum r^2</math>, <math>\sum r^3</math> 之和。(33-P-5、34-P-3)</li> </ol>
	10	等比級數有限和		
	10	無窮等比級數極限	11	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 等比級數收斂的情況，使用公式求收斂等比級數的無限和。</li> <li>2. 對一收斂級數求 <math>n</math> 項之和，無限多項之和。</li> <li>3. 由部分和討論無窮級數的收斂性和極限。(34-P-3)</li> </ol>

五、數學分析(4-1)

	12	函數極限的意義	11	極限的概念 (33-P-9)
微分學	12	切線斜率	11	了解極限和微分的概念, 包含對曲線上一點切線斜率的幾何解說。(33-P-9)
	12	切線方程式	11	找出曲線上的切線方程式和法線方程式, 並使用斜率的相關訊息來繪圖。(33-P-9)
			11	使用標準的微分記號 $f'(x)$ , $f''(x)$ .... 和 $\frac{dy}{dx}$ , $\frac{d^2y}{dx^2}$ .... (33-P-9)
			11	1. 使用 $x^n$ ( $n$ : 有理數), $\sin x$ , $\cos x$ , $\tan x$ , $e^x$ , $a^x$ , $\ln x$ , $\sin^{-1} x$ , $\cos^{-1} x$ , $\tan^{-1} x$ 2. 常數倍、加減乘除和合成之運算。 3. 隱函數或參數式之一次微分 (33-P-9)
			11	$x$ 與 $y$ 為隱數和參數形式, 在例題中求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。(34-P-5)
	12	函數圖形之凹性、反曲點	11	確定一定點, 區分其為極大、極小或反曲點 (33-P-9)
	12	相對極值與二階檢定	10	用任何方法找出二次函數 $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ 的極大極小值 (4018-3)
			11	解極大極小值問題, 並連結變化率、微小增量與逼近。(33-P-9)
12	求極值的應用問題			

五、數學分析(4-2)

微分學			11	7.使用小角逼近 (small-angle approximations) $\sin x \approx x,$ $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2,$ $\tan x \approx x$ (33-P-8)
			11	對一函數做馬克勞林級數 (Maclaurin series) 展開，取其前幾項。 (33-P-9)
積分學	12	反導函數 (不定積分)	11	1. 了解不定積分有如微分的顛倒過程。 2. 對 $x^n$ (包含 $n=1$ 的情況), 做積分, 並求 $e^x, \sin x, \cos x, \sec^2 x$ 其和、差、與常數倍乘法。包含線性替換的表示 (如 $e^{2x-1}$ ), 部份分式使用上的應用, 三角本身使用上的應用 (如 $\int \cos^2 x dx$ )。 3. 認識被積型式 $\frac{kf'(x)}{f(x)}$ 和積分, 如 $\frac{x}{x^2+1}$ 或 $\tan x$ 。 對 $\frac{1}{a^2+x^2}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 做積分。 (33-P-10)
	12	微積分基本定理		
	12	定積分的定義	11	對定積分求值, 如 $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx, \int_0^{\infty} e^{-x} dx$ (33-P-10)
	12	定積分與面積的關係	11	了解曲線下面積的概念, 如矩形面積極限和, 並使用此概念之簡單應用。(33-P-10)

五、數學分析(4-3)

積分學	12	定積分之黎曼和估計		
	12	定積分及其應用： 以求圓面積、球體體積、角錐體積、自由落體運動方程式為主	11	在簡單例子中，使用積分方法找出平面上的面積和旋轉之體積。(33-P-10)
			11	使用積分求弧長、軸上旋轉體的表面積。(34-P-5)
			11	使用積分求平均值(34-P-5)
			11	對於定積分或不定積分，使用代換積分法來做簡化與求值，如 $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (33-P-10)
			11	當被積式被視為乘積時，使用部份積分來做積分，如 $x \sin 2x, x^2 e^x, \ln x$ (33-P-10)
12	距離、速度、加速度	12	了解距離、速度、加速度的概念(33-M-2)	
微分方程			12	用公式表示簡單的敘述，如微分方程的變化率，比例性常數(constant of proportionaility)介紹(33-P-15)
			12	對變數是離散的一階微分方程之一般解做積分。(33-P-15)
			12	藉積分因子找出一階線性微分方程的一般解。(33-P-15)
			12	1. 簡化一階微分方程為分離變數的形式，或藉由給定的簡單替換化成線性形式。 2. 藉由曲線圖示呈現微分方程的一般解，並在簡單例子中描繪具代表性的曲線。(33-P-15)
			12	使用初始條件來找出微分方程的特殊解，藉由微分方程的模型說明其解。(33-P-15)

五、數學分析(4-4)

數 值 方 法			12	梯形數值積分法 使用梯形法來估計定積分的值，在簡單例子中藉圖示來鑑別誤差。(33-P-10)
			12	了解幾何上牛頓法 (Newton-Raphson method) 的運作，取得並使用此法的迭代。體會迭代法未必能收斂到要求的根。(33-P-16)
			12	利用圖形逼近法確定一方程式的根並找尋其符號變化的區間。(33-P-16)
			12	使用線性插值法 (linear interpolation) 找出一方程式之逼近根。(33-P-16)
			12	了解關於方程式的簡單迭代公式 $x_{n+1} = F(x_n)$ ，並使用給定的迭代來求得指定精確程度。(33-P-16)

### 附錄三、英國數學課程標準的能力等級描述

#### **Ma1: using and applying mathematics**

Teachers should expect attainment at a given level in this attainment target to be demonstrated through activities in which the mathematics from the other attainment targets is at, or very close to, the same level.

備註：Ma1 並沒有教學內容之規定，它表現於學習了數學知識與技能之後，在解題或現實活動中所表現出來的能力。

#### **Level 1**

Pupils use mathematics as an integral part of classroom activities. They represent their work with objects or pictures and discuss it. They recognise and use a simple pattern or relationship.

#### **Level 2**

Pupils select the mathematics they use in some classroom activities. They discuss their work using mathematical language and are beginning to represent it using symbols and simple diagrams. They explain why an answer is correct.

#### **Level 3**

Pupils try different approaches and find ways of overcoming difficulties that arise when they are solving problems. They are beginning to organise their work and check results. Pupils discuss their mathematical work and are beginning to explain their thinking. They use and interpret mathematical symbols and diagrams. Pupils show that they understand a general statement by finding particular examples that match it.

#### **Level 4**

Pupils are developing their own strategies for solving problems and are using these strategies both in working within mathematics and in applying mathematics to practical contexts. They present information and results in a clear and organized way. They search for a solution by trying out ideas of their own.

#### **Level 5**

In order to carry through tasks and solve mathematical problems, pupils identify and obtain necessary information. They check their results, considering whether these are sensible. Pupils show understanding of situations by describing them mathematically using symbols, words and diagrams. They draw simple conclusions of their own and give an explanation of their reasoning.

#### **Level 6**

Pupils carry through substantial tasks and solve quite complex problems by independently breaking them down into smaller, more manageable tasks. They interpret, discuss and synthesise information presented in a variety of mathematical forms. Pupils' writing explains and informs their use of diagrams. Pupils are beginning

to give mathematical justifications.

### **Level 7**

Starting from problems or contexts that have been presented to them, pupils progressively refine or extend the mathematics used to generate fuller solutions. They give a reason for their choice of mathematical presentation, explaining features they have selected. Pupils justify their generalisations, arguments or solutions, showing some insight into the mathematical structure of the problem. They appreciate the difference between mathematical explanation and experimental evidence.

### **Level 8**

Pupils develop and follow alternative approaches. They reflect on their own lines of enquiry when exploring mathematical tasks; in doing so they introduce and use a range of mathematical techniques. Pupils convey mathematical or statistical meaning through precise and consistent use of symbols that is sustained throughout the work. They examine generalisations or solutions reached in an activity, commenting constructively on the reasoning and logic or the process employed, or the results obtained, and make further progress in the activity as a result.

### **Exceptional performance**

Pupils give reasons for the choices they make when investigating within mathematics itself or when using mathematics to analyse tasks; these reasons explain why particular lines of enquiry or procedures are followed and others rejected. Pupils apply the mathematics they know in familiar and unfamiliar contexts. Pupils use mathematical language and symbols effectively in presenting a convincing reasoned argument. Their reports include mathematical justifications, explaining their solutions to problems involving a number of features or variables.

## **Ma2: number and algebra**

### **Level 1**

Pupils count, order, add and subtract numbers when solving problems involving up to 10 objects. They read and write the numbers involved.

### **Level 2**

Pupils count sets of objects reliably, and use mental recall of addition and subtraction facts to 10. They begin to understand the place value of each digit in a number and use this to order numbers up to 100. They choose the appropriate operation when solving addition and subtraction problems. They use the knowledge that subtraction is the inverse of addition. They use mental calculation strategies to solve number problems involving money and measures. They recognise sequences of numbers, including odd and even numbers.

### **Level 3**

Pupils show understanding of place value in numbers up to 1000 and use this to make approximations. They begin to use decimal notation and to recognise negative numbers, in contexts such as money and temperature. Pupils use mental recall of addition and subtraction facts to 20 in solving problems involving larger numbers. They add and subtract numbers with two digits mentally and numbers with three digits using written methods. They use mental recall of the 2, 3, 4, 5 and 10 multiplication tables and derive the associated division facts. They solve wholenumber problems involving multiplication or division, including those that give rise to remainders. They use simple fractions that are several parts of a whole and recognise when two simple fractions are equivalent.

#### **Level 4**

Pupils use their understanding of place value to multiply and divide whole numbers by 10 or 100. In solving number problems, pupils use a range of mental methods of computation with the four operations, including mental recall of multiplication facts up to 10 10 and quick derivation of corresponding division facts. They use efficient written methods of addition and subtraction and of short multiplication and division. They add and subtract decimals to two places and order decimals to three places. In solving problems with or without a calculator, pupils check the reasonableness of their results by reference to their knowledge of the context or to the size of the numbers. They recognise approximate proportions of a whole and use simple fractions and percentages to describe these. Pupils recognise and describe number patterns, and relationships including multiple, factor and square. They begin to use simple formulae expressed in words. Pupils use and interpret coordinates in the first quadrant.

#### **Level 5**

Pupils use their understanding of place value to multiply and divide whole numbers and decimals by 10, 100 and 1000. They order, add and subtract negative numbers in context. They use all four operations with decimals to two places. They reduce a fraction to its simplest form by cancelling common factors and solve simple problems involving ratio and direct proportion. They calculate fractional or percentage parts of quantities and measurements, using a calculator where appropriate. Pupils understand and use an appropriate noncalculator method for solving problems that involve multiplying and dividing any threedigit number by any twodigit number. They check their solutions by applying inverse operations or estimating using approximations. They construct, express in symbolic form, and use simple formulae involving one or two operations. They use brackets appropriately. Pupils use and interpret coordinates in all four quadrants.

#### **Level 6**



Pupils order and approximate decimals when solving numerical problems and equations [for example,  $x^3 + x = 20$ ], using trial and improvement methods. Pupils are aware of which number to consider as 100 per cent, or a whole, in problems involving comparisons, and use this to evaluate one number as a fraction or percentage of another. They understand and use the equivalences between fractions, decimals and percentages, and calculate using ratios in appropriate situations. They add and subtract fractions by writing them with a common denominator. When exploring number sequences, pupils find and describe in words the rule for the next term or  $n$ th term of a sequence where the rule is linear. They formulate and solve linear equations with whole number coefficients. They represent mappings expressed algebraically, and use Cartesian coordinates for graphical representation interpreting general features.

### **Level 7**

In making estimates, pupils round to one significant figure and multiply and divide mentally. They understand the effects of multiplying and dividing by numbers between 0 and 1. Pupils solve numerical problems involving multiplication and division with numbers of any size, using a calculator efficiently and appropriately. They understand and use proportional changes, calculating the result of any proportional change using only multiplicative methods. Pupils find and describe in symbols the next term or  $n$ th term of a sequence where the rule is quadratic; they multiply two expressions of the form  $(x + n)$ ; they simplify the corresponding quadratic expressions. Pupils use algebraic and graphical methods to solve simultaneous linear equations in two variables. They solve simple inequalities.

### **Level 8**

Pupils solve problems involving calculating with powers, roots and numbers expressed in standard form, checking for correct order of magnitude. They choose to use fractions or percentages to solve problems involving repeated proportional changes or the calculation of the original quantity given the result of a proportional change. They evaluate algebraic formulae, substituting fractions, decimals and negative numbers. They calculate one variable, given the others, in formulae such as  $V = Yr^2h$ . Pupils manipulate algebraic formulae, equations and expressions, finding common factors and multiplying two linear expressions. They know that  $a^2 - b^2 = (a+b)(a - b)$ . They solve inequalities in two variables. Pupils sketch and interpret graphs of linear, quadratic, cubic and reciprocal functions, and graphs that model real situations.

### **Exceptional performance**

Pupils understand and use rational and irrational numbers. They determine the bounds of intervals. Pupils understand and use direct and inverse proportion. In simplifying algebraic expressions, they use rules of indices for negative and fractional values. In finding formulae that approximately connect data, pupils express general laws in

symbolic form. They solve simultaneous equations in two variables where one equation is linear and the other is quadratic. They solve problems using intersections and gradients of graphs.

### **Ma3: shape, space and measure**

#### **Level 1**

When working with 2D and 3D shapes, pupils use everyday language to describe properties and positions. They measure and order objects using direct comparison, and order events.

#### **Level 2**

Pupils use mathematical names for common 3D and 2D shapes and describe their properties, including numbers of sides and corners. They distinguish between straight and turning movements, understand angle as a measurement of turn, and recognise right angles in turns. They begin to use everyday nonstandard and standard units to measure length and mass.

#### **Level 3**

Pupils classify 3D and 2D shapes in various ways using mathematical properties such as reflective symmetry for 2D shapes. They use nonstandard units, standard metric units of length, capacity and mass, and standard units of time, in a range of contexts.

#### **Level 4**

Pupils make 3D mathematical models by linking given faces or edges, draw common 2D shapes in different orientations on grids. They reflect simple shapes in a mirror line. They choose and use appropriate units and instruments, interpreting, with appropriate accuracy, numbers on a range of measuring instruments. They find perimeters of simple shapes and find areas by counting squares.

#### **Level 5**

When constructing models and when drawing or using shapes, pupils measure and draw angles to the nearest degree, and use language associated with angle. Pupils know the angle sum of a triangle and that of angles at a point. They identify all the symmetries of 2D shapes. They know the rough metric equivalents of imperial units still in daily use and convert one metric unit to another. They make sensible estimates of a range of measures in relation to everyday situations. Pupils understand and use the formula for the area of a rectangle.

#### **Level 6**

Pupils recognise and use common 2D representations of 3D objects. They know and use the properties of quadrilaterals in classifying different types of quadrilateral. They solve problems using angle and symmetry properties of polygons and angle properties of intersecting and parallel lines, and explain these properties. They

devise instructions for a computer to generate and transform shapes and paths. They understand and use appropriate formulae for finding circumferences and areas of circles, areas of plane rectilinear figures and volumes of cuboids when solving problems. They enlarge shapes by a positive whole number scale factor.

#### **Level 7**

Pupils understand and apply Pythagoras' theorem when solving problems in two dimensions. They calculate lengths, areas and volumes in plane shapes and right prisms. Pupils enlarge shapes by a fractional scale factor, and appreciate the similarity of the resulting shapes. They determine the locus of an object moving according to a rule. Pupils appreciate the imprecision of measurement and recognise that a measurement given to the nearest whole number may be inaccurate by up to one half in either direction. They understand and use compound measures, such as speed.

#### **Level 8**

Pupils understand and use congruence and mathematical similarity. They use sine, cosine and tangent in rightangled triangles when solving problems in two dimensions. They distinguish between formulae for perimeter, area and volume, by considering dimensions.

#### **Exceptional performance**

Pupils sketch the graphs of sine, cosine and tangent functions for any angle, and generate and interpret graphs based on these functions. Pupils use sine, cosine and tangent of angles of any size, and Pythagoras' theorem when solving problems in two and three dimensions. They use the conditions for congruent triangles in formal geometric proofs [for example, to prove that the base angles of an isosceles triangle are equal]. They calculate lengths of circular arcs and areas of sectors, and calculate the surface area of cylinders and volumes of cones and spheres. Pupils appreciate the continuous nature of scales that are used to make measurements.

### **Ma4: handling data**

#### **Level 1**

Pupils sort objects and classify them, demonstrating the criterion they have used.

#### **Level 2**

Pupils sort objects and classify them using more than one criterion. When they have gathered information, pupils record results in simple lists, tables and block graphs, in order to communicate their findings.

#### **Level 3**

Pupils extract and interpret information presented in simple tables and lists. They construct bar charts and pictograms, where the symbol represents a group of units,

to communicate information they have gathered, and they interpret information presented to them in these forms.

#### **Level 4**

Pupils collect discrete data and record them using a frequency table. They understand and use the mode and range to describe sets of data. They group data, where appropriate, in equal class intervals, represent collected data in frequency diagrams and interpret such diagrams. They construct and interpret simple line graphs.

#### **Level 5**

Pupils understand and use the mean of discrete data. They compare two simple distributions, using the range and one of the mode, median or mean. They interpret graphs and diagrams, including pie charts, and draw conclusions. They understand and use the probability scale from 0 to 1. Pupils find and justify probabilities, and approximations to these, by selecting and using methods based on equally likely outcomes and experimental evidence, as appropriate. They understand that different outcomes may result from repeating an experiment.

#### **Level 6**

Pupils collect and record continuous data, choosing appropriate equal class intervals over a sensible range to create frequency tables. They construct and interpret frequency diagrams. They construct pie charts. Pupils draw conclusions from scatter diagrams, and have a basic understanding of correlation. When dealing with a combination of two experiments, pupils identify all the outcomes, using diagrammatic, tabular or other forms of communication. In solving problems, they use their knowledge that the total probability of all the mutually exclusive outcomes of an experiment is 1.

#### **Level 7**

Pupils specify hypotheses and test them by designing and using appropriate methods that take account of variability or bias. They determine the modal class and estimate the mean, median and range of sets of grouped data, selecting the statistic most appropriate to their line of enquiry. They use measures of average and range, with associated frequency polygons, as appropriate, to compare distributions and make inferences. They draw a line of best fit on a scatter diagram, by inspection. Pupils understand relative frequency as an estimate of probability and use this to compare outcomes of experiments.

#### **Level 8**

Pupils interpret and construct cumulative frequency tables and diagrams, using the upper boundary of the class interval. They estimate the median and interquartile range and use these to compare distributions and make inferences. They understand how to calculate the probability of a compound event and use this in solving problems.

**Exceptional performance**

Pupils interpret and construct histograms. They understand how different methods of sampling and different sample sizes may affect the reliability of conclusions drawn. They select and justify a sample and method to investigate a population. They recognise when and how to work with probabilities associated with independent and mutually exclusive events.

## 附錄四、台灣與中國大陸之數學課程比較表

以下是台灣九年一貫數學學習領域綱要以及 95 年高中數學暫行綱要與中國大陸數學課程標準之對照比較表。此處之大陸中小學數學課程標準乃是根據中國大陸教育部北京師範大學基礎教育課程研究中心—新世紀課程網

[http://www.xsj21.com/maths/index\\_1.php](http://www.xsj21.com/maths/index_1.php) 所下載的文件。大陸高中數學課程標準乃是根據中國大陸人民教育出版社 <http://www.pep.com.cn/gjcjf/index.htm> 所下載的文件。

由於大陸的課程標準是以樹狀結構呈現，並沒有類似我國的能力指標。為了方便搜尋，我們替大陸加上能力指標。大陸方面的能力指標，其實是對於每一個數狀結構的最底層，根據層數，由上而下排列。以中小學課程標準為例：第一學段裡的第二個主題中的第三個目標下的第四個項目，以 1-2-3-4 表示，以此類推。

大陸高中數學課程標準分成必修與選修。包括 A、B、C、D、E、F 六大類，其中 A 類 (A1、A2、A3、A4、A5) 為必修，B 類 (B1、B2，適用於報考文、法、商的學生)、C 類 (C1、C2、C3，適用於報考理工的學生)、D 類 (D1、D2、D3、D4)、E 類 (E1、E2、E3、E4)、F 類 (F1、F2、...、F10) 為選修。由於必修 (A 系列) 為選修 (B...F 系列) 的基礎，且 A1 為 A2...A5 的基礎，B1 為 B2 的基礎，C1 為 C2、C3 的基礎，因此，我們可以猜想：高一上只能選擇 A1，高一下選擇 A2 及 A3 (其實 A2...A5 不需考慮順序，我們假設選擇前兩個)，高二上選擇 A4 及 A5，高二下選擇 B1 或 C1，高三上選擇 B2 或 C2 高三下選擇 C3。以下的列表就是以上述猜想為基礎作成的：10 年級包括 A1、A2、A3，11 年級包括 A4、A5、B1、C1，12 年級包括 B2、C2、C3。至於 F 系列的課程，我們假設它放在 11 或 12 年級。D、E、F 系列課程不依賴於其他系列的課程，可以與其他系列課程同時開設，這些專題的開設可以不考慮先後順序。由於 D 系列課程是數學文化系列課程，E 系列課程是應用系列課程，因此，本綱要對照表並沒有把這兩類列入比較。關於 F 系列課程，事實上我們只選擇其中的四個，分別是 F1 (幾何證明)、F4 (矩陣與變換)、F5 (數列與差分) 以及 F8 (初等數論初步)。以上的比較標準，相當於假設修了 20 個數學學分 (其中包括必修 A 類 10 學分，選修 B 或 C 類 6 學分，F 類 4 學分)。

### 一、數與量

		台灣		大陸	
項目		年級	說明	年級	說明
整數	正整數	1	N-1-01 100 以內的數	1~3	1-1-1-1 萬以內的數
		2	N-1-01 1000 以內的數		

		3	N-1-01 10000 以內的數		
--	--	---	----------------------	--	--

一、數與量(6-1)

整數	正整數	4	N-1-01 億、兆	4~6	2-2-1-1-1-1 億以內
		6~7	能理解因數、倍數、質因數、最大公因數和最小公倍數，並熟練質因數分解的方法（N-3-01、N-3-02）	4~6	2-1-1-1-7 在1~100的自然數中，能找出10以內某個自然數的所有倍數，並知道2，3，5的倍數的特徵，能找出10以內兩個自然數的公倍數和最小公倍數。 2-1-1-1-8 在1~100的自然數中，能找出某個自然數的所有因數，能找出兩個自然數的公因數和最大公因數。 2-1-1-1-9 知道整數、奇數、偶數、質數、合數。
		10	輾轉相除法	11 或 12	F8-4 通過實例探索利用輾轉相除法求兩個整數的最大公約數的方法，理解互素的概念，並能用輾轉相除法證明：若a能整除bc，a、b互素，則a能整除c。探索公因數和公倍數的性質。瞭解算術基本定理。
					F8-5 通過實例理解一次不定方程的模型，利用輾轉相除法求解一次不定方程。並嘗試寫出演算法程式框圖，在條件允許的情況下，可上機實現。
	10	數學歸納法 (介紹數學歸納法並應用於證明。)			
負數	7	N-3-08 能以正、負表徵生活中相對的量，並認識負數是性質（方向、盈虧）的相反	4~6	2-2-1-1-1-4 會用負數表示生活中的問題	



一、數與量(6-2)

初等數論				11 或 12	F8-1 通過實例（如：星期），認識帶餘除法，理解同餘和剩餘類的概念及意義，探索剩餘類的運算性質（加法和乘法），並且理解它的實際意義。體會剩餘類運算與傳統的數的運算的異同（會出現零因數）。
				F8-2 理解整除、因數和素數的概念，瞭解確定素數的方法（篩法），知道素數有無窮多。	
				F8-3 瞭解十進位表示的整數的整除判別法，探索整數能被 3, 9, 11, 7 等整除的判別法。會檢查整數加法，乘法運算錯誤的一種方法。	
				F8-6 通過實例（如：韓信點兵），理解一次同餘方程組模型。	
				F8-7 理解大衍求一術和孫子定理的證明。	
				F8-8 瞭解數論在密碼中的應用-公開密鑰	
有理數	小數	3	N-1-10 認識一位小數，並學習一位小數（整數兩位）的加減直式計算	1~3	1-1-1-1-5 能認、讀、寫小數 1-1-1-2-4 一位小數的加減運算
		4	N-2-10 認識 2、3 位小數及其四則運算	4~6	2-2-1-1-1-2 探索小數、分數和百分數之間的關係 2-2-1-1-1-3 能比較小數、分數和百分數的大小
	分數	2	N-1-09 同分母加減運算（分母小於 12）	1~3	1-1-1-2-4 同分母加減運算（分母小於 10）
		4	N-2-07 假分數的整數倍計算，但不作帶分數的整數倍計算	4~6	2-2-1-1-2-6 分數（不含帶分數）的四則運算
		4~5	N-2-08 等值分數、約分、擴分的意義		

一、數與量(6-3)

有理數	分數	5	N-2-09 異分母的比較與加減		
	比例	6	N-3-05 比、比值、正比、反比	4~6	2-2-1-1-4-1、2-2-1-1-4-2、 2-2-1-1-4-3、2-2-1-1-4-4 正比、反比
	絕對值	7	N-3-10 理解絕對值在數線上的意義 能用絕對值符號表示數線上兩點間間隔(距離) 能運算絕對值並熟練其應用	7~9	3-1-1-1-2 藉助數軸理解相反數和絕對值的意義，會求有理數的相反數與絕對值(絕對值符號內不含字母)
量與實測	長度、容量、重量	1	N-1-14 能認識長度，並作直接比較	1~3	1-2-1-2-2 認識公里、公尺、公分，並會恰當的選擇長度單位
		1	N-1-15 利用間接比較或個別單位來比較長短		
		2	N-1-14 能認識容量、重量，並作直接比較	1~3	1-1-1-3-4 認識克、千克、噸
		2	N-1-15 能說明用不同個別單位測量相同長度，其數值不同		
		5	N-2-18 容量、容積和體積的關係	4~6	2-2-1-2-5 了解體積(包括容積)的意義
	角度	3	N-1-14、N-1-15 能認識角，並比較大小	4~6	2-2-1-2-1 會用量角器量角度，會用三角板畫30度、45度、60度和90度
		4	N-1-16 會用量角器實測角度或畫出指定的角(如：30度、45度、60度、90度、120度、135度、150度)		

一、數與量(6-4)

量與實測	面積、體積、周長	2	N-1-14 能認識面積，並作直接比較	1~3	1-2-1-2-5 結合實例認識面積的含義，並能估計和測量圖形的面積，體會並認識面積單位(平方公分、平方公尺、平方公里、公頃)，會進行簡單的單位換算
		3	N-1-15 能利用間接比較或個別單位實測的方法比較不同面積的大小，並認識面積單位「平方公分」		
		4	N-2-15 能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並作相關計算		
		5	N-2-15、N-2-16 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並作相關計算		
		4	N-2-17 能理解長方形和正方形的面積與周長公式	1~3	1-2-1-2-4 探索並掌握長方形和正方形的周長公式
					1-2-1-2-6 探索並掌握長方形和正方形的面積公式
		4	N-1-15、N-1-16 能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較不同體積的大小，並認識體積單位「立方公分」	4~6	2-2-1-2-5 透過實例，了解體積(包括容積)的意義及度量單位(立方公尺、立方公分)，會進行單位之間的換算
		5	N-2-15、N-2-1 能理解體積單位「立方公尺」，及「立方公分」、「立方公尺」間的關係，並作相關計算		
		5	N-2-19 能理解三角形、平行四邊形和梯形的面積公式	4~6	2-2-1-2-2 利用方格紙或割補等方法，探索並掌握三角形、平行四邊形和梯形的面積公式
		5	N-2-17 能理解長方體和正方體的體積公式	4~6	2-2-1-2-6 結合具體情境，掌握長方體、正方體、圓柱的體積和表面積以及圓錐體積的計算方法
6	N-3-17 能理解簡單柱體的體積				

一、數與量(6-5)

量 與 實 測		8	S-4-04 能計算柱體表面積的問題		
	時 間	1	N-1-13 能報讀整點、半點的時刻	1~3	1-1-1-3-2 了解 24 時計時法
		2	N-1-13 能報讀幾點幾分		
		3	N-1-13 認識日、時、分、秒的關係，並 能作同單位時間量的加減計算	1~3	1-1-1-3-3 了解年、月、日之間的關係
		4	N-2-15 能解決複名數的時間量計算，以 及時刻與時間量的加減問題		
圓 面 積 、 圓 周 長	6	N-3-16 可由圓周長的實測理解圓周長 與直徑成比例。能理解圓面積公 式，並能計算簡單扇形面積	4~6	2-2-1-2-3 探索並掌握圓周長和圓面積公式	
估 算		2	N-1-16、N-1-17 認識公分、公尺，並能作相關的 實測、估測與計算		
		3	N-1-17 認識長度單位 (毫米、公分、公 尺)、容量單位 (公升、毫升)、 重量單位 (公斤、公克)，並能作 相關的實測、估測與計算	1~3	1-2-1-2-3 能估計一些物體的長度並進行測量
				1~3	1-2-1-2-6 能估計給定的長方形、正方形面積
		5	N-2-05 能用四捨五入法取概數，並作 加、減之估算 N-2-05 能用四捨五入法對小數在指定 位數取概數，並作估算		

一、數與量(6-6)

估 算	6	N-3-15 使用方格紙估算曲線所圍區域面積	4~6	2-2-1-2-4 能用方格紙估計不規則圖形的面積
			4~6	2-1-1-2-8 藉由解決問題，找到合適的估算方法
數 系	10	無理數 (介紹無理數如 $\sqrt{n}$ 和 $\pi$ ，其中 $n$ 為非完全平方的正整數。含 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。)		
	10	平方根之四則運算		
	10	有理化分子 / 分母 (介紹基本的根式運算如 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ， $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 等。含分母為 $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ 時的有理化，其中 $n, m$ 為正整數。)		
	10	實數		
	10	複數的定義 (介紹 $i$ 的由來，含一元二次方程式根的討論，特別是判別式小於 0 之情形。)	12	B2-4-1、C2-2-1 在問題情境中瞭解數系的擴充過程，體會實際需求與數學內部的矛盾（數的運算規則、方程求根）在數系擴充過程中的作用，感受人類理性思維的作用以及數與現實世界的聯繫。 B2-4-2、C2-2-2 理解複數的基本概念以及複數相等的充要條件。
10	複數之四則運算 (介紹複數平面和複數的四則運算。複數平面只是強調一一對應關係。)	12	B2-4-4 能進行複數代數形式的四則運算，瞭解複數代數形式的加減運算的幾何意義。	

二、代數（含樣式、關係、函數與坐標圖形）

	台灣	大陸
--	----	----

項目	年級	說明	年級	說明
能以數學符號表示數學式子	2	A-1-02 能將具體情境中單步驟的加減問題列成算式填充題，並解釋式子與原問題情境的關係		
	3	A-1-02 能將具體情境中單步驟的乘、除問題列成算式填充題，並解釋式子與原問題情境的關係		
	4	A-2-05 能用中文簡計式表示長方形和正方形的面積公式與周長公式		
	5	A-2-05 能用中文簡計式表示長方體和正方體的體積公式		
	4	A-2-04 能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式，並能解釋式子與原問題情境的關係	4~6 7~9 7~9	2-1-1-3-1 在具體情境中會用字母表示數 3-1-1-1-3-1 在現實情境中進一步理解用字母表示數的意義 3-1-1-1-3-2 能分析簡單問題的數量關係，並用代數式表示
	5	A-2-04 能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題，並嘗試解題及驗算其解		
6	A-3-03 能使用 $x$ ， $y$ ...等未知數符號，將具體情境中問題列成兩步驟的算式題，並嘗試解題及驗算其解			

二、代數(19-1)

數學式與方程式的操作	1	A-3-03 能在具體情境中，認識加法的交換律、結合律，並運用於簡化計算		
	2	A-3-03 能在具體情境中，認識乘法的交換律，並運用於簡化計算		
	1	A-1-04 能在具體情境中，認識加減互逆	4~6	2-2-1-2-5 在具體運算和解決簡單實際問題的過程中，體會加與減、乘與除的互逆關係
	2	A-1-04 能理解加減互逆，並運用於驗算與解題		
	3	A-1-05 能在具體情境中，認識乘除互逆		
	4	A-2-02 能理解乘除互逆，並運用於驗算與解題		
	4	A-2-01 能在具體情境中，理解乘法結合律、先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積	4~6	2-1-1-2-4 探索和理解運算律，能應用運算律進行一些簡便運算 2-1-1-2-6 會分別進行簡單的小數、分數（不含帶分數）加、減、乘、除運算及混合運算（以兩步為主，不超過三步）
	5	A-2-03 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算	7~9	3-1-1-1-4 理解有理數的運算律，並能運用運算律簡化運算 3-1-1-1-5 能運用有理數的運算解決簡單的問題
	6	A-3-02 能理解等量公理		4~6

二、代數(19-2)

數量間的變化與關係	6	A-3-07 能在比例的情境或幾何公式中，透過列表的方式認識變數	7~9	3-1-1-3-2-1 通過簡單實例，瞭解常量、變數的意義 3-1-1-3-2-2 能結合實例，瞭解函數的概念和三種表示方法，能舉出函數的實例 3-1-1-3-2-3 能結合圖像對簡單實際問題中的函數關係進行分析 3-1-1-3-2-4 能確定簡單的整式、分式和簡單實際問題中的函數的引數取值範圍，並會求出函數值 3-1-1-3-2-5 能用適當的函數表示法刻畫某些實際問題中變數之間的關係 3-1-1-3-2-6 結合對函數關係的分析，嘗試對變數的變化規律進行初步預測
坐標	7	A-3-11、A-3-12 能運用直角坐標系來標定位置 能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形 能在直角坐標平面上認識二元一次聯立方程式的解		
一元一次方程式與不等式	7	A-3-08 能由具體情境中列出一元一次方程式，並理解其解的意義 能以等量公理來解一元一次方程式，並做驗算 能以移項法則來解一元一次方程式，並做驗算	7~9	3-1-1-2-1-3 會解一元一次方程、簡單的二元一次方程組、可化為一元一次方程的分式方程（方程中的分式不超過兩個）



## 二、代數(19-3)

一元一次方程式與不等式	7	A-3-09 能由具體情境中列出一元一次不等式 能利用移項法則在數線上找出一元一次不等式的解 能由具體情境中描述一元一次式解的意義	7~9	3-1-1-2-2-2 會解簡單的一元一次不等式，並能在數軸上表示出解集。會解由兩個一元一次不等式組成的不等式組，並會用數軸確定解集 3-1-1-2-2-3 能夠根據具體問題中的數量關係，列出一元一次不等式和一元一次不等式組，解決簡單的問題
二元一次方程式	7	A-3-10 能由具體情境中列出二元一次方程式，並理解其解的意義 A-3-13 能由具體情境中列出二元一次聯立方程式，並理解其解的意義 能在直角坐標平面上認識解二元一次聯立方程式的解 能熟練使用消去法解二元一次聯立方程式	7~9	3-1-1-3-3-4 能根據一次函數的圖像求二元一次方程組的近似解
一元二次方程式	8	A-4-05 能由具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義 能利用一元二次方程式解應用問題	7~9	3-1-1-2-1-4 理解配方法，會用因式分解法、公式法、配方法解簡單的數字係數的一元二次方程式
因式分解	8	A-4-04 能理解因式、倍式、公因式與因式分解的意義 能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解 能利用提出公因式與分組分解法分解二次多項式	7~9	3-1-1-1-4-4 會用提公因式法、公式法（直接用公式不超過二次）進行因式分解（指數是正整數）

二、代數(19-4)

函數圖形	一次函數圖形	7	A-3-11 能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形	7~9	3-1-1-3-3-2 會畫一次函數的圖像，根據一次函數的圖像和解析運算式 $y=kx+b$ 探索並理解其性質
				7~9	3-1-1-3-4-2 能畫出反比例函數的圖像，根據圖像和解析運算式 $y=kx$ 探索並理解其性質
函數圖形	二次函數圖形	9	A-4-06 能理解二次函數的樣式並繪出其圖形 能利用配方法繪出二次函數的圖形 能計算二次函數的最大值與最小值 能應用二次函數最大值與最小值的簡單性質	7~9	3-1-1-3-5-2 會用描點法畫出二次函數的圖像，能從圖像上認識二次函數的性質 3-1-1-3-5-3 會根據公式確定圖像的頂點、開口方向和對稱軸（公式不要求記憶和推導），並能解決簡單的實際問題 3-1-1-3-5-4 會利用二次函數的圖像求一元二次方程的近似解
			A-4-07 能理解二次函數的圖形與拋物線的概念 能理解拋物線的線對稱性質		
基本函數		10	直線的點斜式 (複習平面坐標系，直線方程式，並介紹斜率。)	10	A2-2-1-2 理解直線的傾斜角和斜率的概念，經歷用代數方法刻畫直線斜率的過程，掌握過兩點的直線的斜率計算公式。
					A2-2-1-4 根據確定直線位置的幾何量，探索並掌握直線方程的幾種形式（點斜式、兩點式及一般式），體會斜截式與一次函數的關係。

二、代數(19-5)

基本函數	10	多項式函數 (含一次、二次多項式函數的圖形。)	10	A1-2-1-4 通過已學過的函數特別是二次函數，理解這些函數的單調性、最大(小)值及其幾何意義；知道奇偶性的含義。 A1-2-5-1 結合二次函數的圖像，判斷一元二次方程根的存在性及根的個數，從而瞭解函數的零點與方程根的聯繫。
	10	指數函數	10	A1-2-2-1 通過具體實例(如：細胞的分裂，考古中所用的 $C_{14}$ 的衰減，藥物在人體內殘留量的變化)，瞭解指數函數模型的實際背景，體會引入有理指數冪的必要性。 A1-2-2-2 理解有理指數冪的含義，知道實數指數冪的意義，掌握冪的運算。 A1-2-2-3 理解指數函數的概念和意義，能借助計算器或電腦畫出具體指數函數的圖像，探索並理解指數函數的單調性與特殊點。 A1-2-2-4 在解決簡單實際問題的過程中，體會指數函數是一類重要的函數模型
	10	對數函數	10	A1-2-3-1 理解對數的概念及其運算性質，知道用換底公式能將一般對數轉化成自然(常用)對數；通過閱讀材料，瞭解對數的發現歷史以及對簡化運算的作用。 A1-2-3-2 通過具體實例，直觀瞭解對數函數模型所刻畫的數量關係，初步理解對數函數的概念，體會對數函數是一類重要的函數模型；能借助計算器或電腦畫出具體對數函數的圖像，探索並瞭解對數函數的單調性與特殊點。

二、代數(19-6)

基本函數			10	A1-2-6-1 利用計算工具，對比指數函數、對數函數以及冪函數增長差異；結合實例體會直線上升、指數爆炸、對數增長等不同函數類型增長的含義。
	10	對數函數	10	A1-2-6-2 收集一些社會生活中普遍使用的函數模型（指數函數、對數函數、冪函數、分段函數等），瞭解函數模型的廣泛應用。
	10	特殊角的三角比 (先處理有一個銳角為 $30^\circ$ ，或 $45^\circ$ 的直角三角形邊角性質。)	7~9	3-2-1-2-4 6. 通過實例認識銳角三角函數（ $\sin A$ ， $\cos A$ ， $\tan A$ ），知道 $30^\circ$ ， $45^\circ$ ， $60^\circ$ 角的三角函數值；會使用計算器由已知銳角求它的三角函數值，由已知三角函數值求它對應的銳角。 7. 運用三角函數解決與直角三角形有關的簡單實際問題。
	10	廣義角的三角函數、弧度量	11	A4-1-1 瞭解任意角的概念和弧度制，能進行弧度與角度的互化。 A4-1-2-1 借助單位圓理解任意角三角函數（正弦、餘弦、正切）的定義。 A4-1-2-3 借助圖像理解正弦函數、餘弦函數在 $[0, 2\pi]$ ，正切函數在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上的性質（如單調性、最大和最小值、圖像與 x 軸交點等）。 A4-1-2-5 結合具體實例，瞭解 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的實際意義；能借助計算器或電腦畫出 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的圖像，觀察 $A$ ， $\omega$ ， $\phi$ 對函數圖像變化的影響。 A4-1-2-6 會用三角函數解決一些簡單實際問題，體會三角函數是描述週期變化現象的重要函數模型。

二、代數(19-7)

基本函數	10	三角函數之關係 (倒數關係、平方關係、商數關係、餘角關係、和角公式、積化和差公式、倍角與半角公式)	11	A4-1-2-4 理解同角三角函數的基本關係式： $\sin^2x + \cos^2x = 1$ ， $\sin x / \cos x = \tan x$ 。 A5-2-1 經歷用向量的數量積推導出兩角差的餘弦公式的過程，進一步體會向量方法的作用。 A5-2-2 能從兩角差的餘弦公式導出並會用兩角和與差的正弦、餘弦、正切公式，二倍角的正弦、餘弦、正切公式，瞭解它們的內在聯繫。 A5-2-3 能運用上述公式進行簡單的恒等變換（包括嘗試導出積化和差、和差化積、半角公式，但不要求記憶）。
	10	正弦定理與餘弦定理	11	A4-2-1 通過對任意三角形邊長和角度關係的探索，掌握正弦定理、餘弦定理，並能解決一些簡單的三角形度量問題。 A4-2-2 能夠運用正弦定理、餘弦定理等知識和方法解決一些與測量和計算有關的實際問題。
多項式	10	多項式的四則運算 (含綜合除法)		
	10	餘式與因式定理 (含整係數多項式的一次因式檢驗法。)		
	10	最高公因式與最高公倍式 (利用輾轉相除法求最高公因式)		
	10	代數基本定理		
	10	共軛複根		
	10	勘根定理		

二、代數(19-8)

函數性質與運算			10	A1-2-1-1 通過豐富實例，進一步體會函數是描述變數之間的依賴關係的重要數學模型，在此基礎上學慣用集合與對應的語言來刻畫函數，體會對應關係在刻畫函數概念中的作用；瞭解構成函數的要素，會求一些簡單函數的定義域和值域；瞭解映射的概念。
	10	函數之和差 (正、餘弦函數之疊合)		
函數性質與運算	10	反函數 (指數與對數互為反函數的意義以公式直接表達，不一定要提反函數這三個字，但要在坐標平面上同時呈現這兩個函數的圖形。)	10	A1-2-3-3 知道指數函數 $y=a^x$ 和對數函數 $y=\log_a x$ 互為反函數。 $(a>1, a\neq 1)$
			11	A4-1-2-2 借助單位圓中的三角函數線推導出誘導公式，能畫出 $y = \sin x$ , $y = \cos x$ , $y = \tan x$ 的圖像，瞭解三角函數的週期性。
				A1-2-1-2 在實際情境中，會根據不同的需要選擇恰當的方法（圖像法、列表法、解析法）表示函數。
				A1-2-1-5 學會運用函數圖像理解和研究函數的性質
				A1-2-4 通過實例，瞭解冪函數的概念；結合函數 $y=x, y=x^2, y=x^3, y=x^{-1}, y=x^{1/2}$ 的圖像，瞭解它們的變化情況。

二、代數(19-9)

			11	A1-2-5-2 根據具體函數的圖像，能夠借助計算器用二分法求相應方程的近似解，瞭解這種方法是求方程近似解的常用方法。
線性代數	10	方程式解的意義(交點) 以兩直線的關係說明二元一次方程組求解的幾何意義。	10	A2-2-1-5 能用解方程組的方法求兩直線的交點坐標。
			11 或 12	F4-5-1 能用變換與映射的觀點認識解方程組的異議。
	11	線性聯立方程式	11 或 12	F4-5-3 會通過具體的係數矩陣，從幾何上說明方程組解的存在性，唯一性。
	11	解的算法 (克拉瑪、高斯消去法、列運算、增廣矩陣) 以解文字為係數的二元一次方程組介紹克拉瑪公式和二階行列式。		
	12	克拉瑪公式 (限二元，三元)		
	12	行列式性質 (列運算、cofactor 降階)	11 或 12	F4-4-3 瞭解二階行列式的定義
	12	行列式與面積 / 體積 (以二階行列式求平面上平行四邊形的面積。)		
	12	矩陣表達式	11 或 12	F4-2-3 通過大量具體的矩陣對平面上給定圖形(如正方形)的變換，認識到矩陣可表示如下的線性變換：恒等、反射、伸壓、旋轉、切變、投影。

二、代數(19-10)

線性代數	12	反矩陣 1. 含以列運算求反方陣及二階反方陣之行列式求法。 2. 以二階反方陣之行列式求法解釋克拉瑪公式。	11 或 12	F4-4-1 通過具體圖形變換，理解逆矩陣的意義；通過具體的投影變換，說明逆矩陣可能不存在。	
				F4-4-2 會證明逆矩陣的唯一性和 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 等簡單性質，並瞭解其在變換中的意義。	
				F4-4-3 會用二階行列式求逆矩陣。	
				F4-5-2 會用係數矩陣的逆矩陣解方程組。	
				11 或 12	F4-6-1 掌握矩陣特徵值與特徵向量的定義，能從幾何變換上說明特徵向量的意義。
					F4-6-2 會求二階方陣的特徵值與特徵向量（只要求特徵值是二個不同實數的情形）。
					F4-7-1 利用矩陣 $A$ 的特徵值、特徵向量給出 $A^n \vec{\alpha}$ 簡單的表示，並能用它來解決一個實際問題。
	12	矩陣的加法與係數積 (強調矩陣的意義，多用實例說明。)			
	12	矩陣的乘法運算 (含乘法的代數性質，轉移矩陣 (transition matrix) 多用實例說明)		11 或 12	F4-2-1 以映射和變換的觀點認識矩陣與向量乘法的意義。
					F4-3-1 通過變換的實例，瞭解矩陣與矩陣的乘法的意義。
					F4-3-2 通過具體的幾何圖形變換，說明矩陣乘法不滿足交換律。
					F4-3-3 驗證二階方陣乘法滿足結合律。



二、代數(19-11)

			11 或 12	F4-3-4 通過具體的幾何圖形變換，說明乘法不滿足消去律。
不等式	12	柯西不等式		
	12	算幾不等式	11	A5-3-4 基本不等式： $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ( $a, b \geq 0$ ) 1. 探索並瞭解基本不等式的證明過程。 2. 會用基本不等式解決簡單的最大(小)問題。
	12	一元多項式不等式之解區間 (以分解因式解一元多項式不等式並在數線上標示解區間)	11	A5-3-2-1 經歷從實際情境中抽象出一元二次不等式模型的過程。
				A5-3-2-2 通過函數圖像瞭解一元二次不等式與函數、方程的聯繫。
				A5-3-2-3 會解一元二次不等式，嘗試設計求解給定的一元二次不等式的程式框圖。
12	二元多項式不等式之解區間 (解二元一次多項式不等式並在坐標平面上標示解區域)	11	A5-3-3-1 從實際情境中抽象出二元一次不等式組。	
12	線性規劃 (只限二元)	11	A5-3-3-2 瞭解二元一次不等式的幾何意義，能用平面區域表示二元一次不等式組。	
			A5-3-3-3 從實際情境中抽象出一些簡單的二元線性規劃問題，並能加以解決。	
遞迴數列與差分方程	11	遞迴關係數列 (遞迴關係以 $a_n = \alpha a_{n-1} + f(n)$ 及 $a_n = \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2}$ 的形式為主，其中 $\alpha, \beta, \gamma$ 為常數， $f(n)$ 是次數小於3的多項式。)		

二、代數(19-12)

遞迴數列與差分方程		11 或 12	F5-1-1 通過一些具體實例，理解數列差分的概念。
			F5-1-2 理解數列的一、二階差分以及它們對描述數列變化的意義，結合數列（作為函數）的圖像，了解差分與數列的增減、極值、數列圖像的凹凸的關係。
		11 或 12	F5-2 一階線性差分方程 $x_{n+1} = k x_n + b$ (1) 通過一些具體實例，體會方程 $x_{n+1} = k x_n + b$ 是十分有用的數學模型。 (2) 理解方程 $x_{n+1} = k x_n + b$ 中，當 $b=0$ （即方程為齊次方程）時，其解為等比數列；當 $k=1$ （即差分為常數）時，其解為等差數列。 (3) 認識方程 $x_{n+1} = k x_n + b$ 的通解、特解，瞭解方程的解與相應的齊次方程 $x_{n+1} = k x_n$ 通解的關係；能給出方程 $x_{n+1} = k x_n + b$ 的通解公式。 (4) 了解差分方程初值問題，給定初值，會用迭代法求一階線性差分方程的解。
			F5-3 (二元) 一階線性差分方程組 $x_{n+1} = a x_n + b y_n + c$ $y_{n+1} = d x_n + e y_n + f$ (1) 通過一些實例，認識一階線性差分方程組是描述現實世界的一個重要模型。 (2) 瞭解一階線性差分方程組的通解、特解與其相應齊次方程組通解的關係。 (3) 給定初值，會用迭代法求一階線性差分方程組的解；能寫出求解的演算法框圖。

二、代數(19-13)

遞迴數列與差分方程			11 或 12	(4) 對給定的具體方程組，能初步討論當 $n \rightarrow \infty$ 時，解（數列）的變化趨勢（收斂、發散、週期）。
				F5-4 (1) 學會用差分方程解決一些簡單的實際問題。 (2) 初步體會連續變數離散化的思想，能用它來討論一些簡單的問題。
				F5-5 借助計算工具，通過計算和操作，討論模型 $x_{n+1}=kx_n(1-x_n)$ 當 $k$ 取不同特殊值時 $x_n$ 的變化情況，初步瞭解幾種混沌現象。
二次曲線與曲面	11	圓方程式	10	A2-2-2-1 回顧確定圓的幾何要素，在平面直角坐標系中，探索並掌握圓的標準方程與一般方程。
	11	圓與直線之關係(切、割)	10	A2-2-2-2 能根據給定直線、圓的方程，判斷直線與圓、圓與圓的位置關係。
			11	A2-2-2-3 能用直線和圓的方程解決一些簡單的問題。
				C1-2-1-4 能用坐標法解決一些與圓錐曲線有關的簡單幾何問題（直線與圓錐曲線的位置關係）和實際問題。
			11 或 12	F1-2 證明圓周角定理、圓的切線的判定定理及性質定理。 F1-3 證明相交弦定理、圓內接四邊形的性質定理與判定定理、切割線定理。
11	拋物線方程式	11	B1-2-3 瞭解拋物線、雙曲線的定義、幾何圖形和標準方程，知道它們的有關性質。	

二、代數(19-14)

二次 曲 線 與 曲 面	11	橢圓方程式	11	B1-2-2 經歷從具體情境中抽象出橢圓模型的過程，掌握橢圓的定義、標準方程及簡單性質。 C1-2-1-2 經歷從具體情境中抽象出橢圓、拋物線模型的過程，掌握它們的定義、標準方程、幾何圖形及簡單性質。
			11 或 12	F1-4 瞭解平行投影的含義，通過圓柱與平面的位置關係，體會平行投影；證明平面與圓柱面的截線是橢圓（特殊情形是圓）。
	11	雙曲線方程式	11	C1-2-1-3 瞭解雙曲線的定義、幾何圖形和標準方程，知道雙曲線的有關性質。
	11	球方程式		
	11	球與平面之關係		
	11	圓錐曲線數學性質 (焦點、準線、距離關係、漸進線)	11 或 12	F1-5 展示平面截圓錐面的情景，體會下面定理： 定理：在空間中，取直線 $l$ 為軸，直線 $l'$ 與 $l$ 相交於 $O$ 點，其夾角為 $\alpha$ ， $l'$ 圍繞 $l$ 旋轉得到以 $O$ 為頂點， $l'$ 為母線的圓錐面，任取平面 $\pi$ ，若它與軸 $l$ 交角為 $\beta$ ( $\pi$ 與 $l$ 平行，記 $\beta=0$ )，則： (1) $\beta > \alpha$ ，平面 $\pi$ 與圓錐的交線為橢圓； (2) $\beta = \alpha$ ，平面 $\pi$ 與圓錐的交線為拋物線； (3) $\beta < \alpha$ ，平面 $\pi$ 與圓錐的交線為雙曲線。

二、代數(19-15)

二次曲線與曲面			11 或 12	F1-6 利用 Dandelin 雙球 這兩個球位於圓錐的內部，一個位於平面 $\pi$ 的上方，一個位於平面的下方，並且與平面 $\pi$ 及圓錐均相切)證明上述定理 (1) 情況。  F1-7 試證明以下結果： 1. 在 6 中，一個 Dandelin 球與圓錐面的交線為一個圓，並與圓錐的底面平行，記這個圓所在平面為 $\pi'$ ； 2. 如果平面 $\pi$ 與平面 $\pi'$ 的交線為 $m$ ，在 5 (1) 中橢圓上任取一點 $A$ ，該 Dandelin 球與平面 $\pi$ 的切點為 $F$ ，則點 $A$ 到點 $F$ 的距離與點 $A$ 到直線 $m$ 的距離比是小於 1 的常數 $e$ 。(稱點 $F$ 為這個橢圓的焦點，直線 $m$ 為橢圓的準線，常數 $e$ 為離心率。)
	11	圓錐曲線物理 (光學) 性質	11	B1-2-5 瞭解圓錐曲線的簡單應用。
平面坐標與向量	10	複數與直角坐標	12	B2-4-3、C2-2-3 瞭解複數的代數表示法
	10	複數之極式 介紹向徑、輻角與極坐標之概念，含棣美弗定理，1 的 $n$ 次方根。	12	B2-4-3、C2-2-3 瞭解複數的三角表示法及其幾何意義。
	11	向量內積，內積的應用 (含柯西不等式、正射影、兩直線的夾角。)	11	A5-1-4-1 通過物理中“功”等實例，理解平面向量數量積的含義及其物理意義。  A5-1-4-2 掌握數量積的坐標運算式，會進行平面向量數量積的運算。  A5-1-4-3 體會平面向量的數量積與向量投影的關係。

二、代數(19-16)

平面坐標與向量			11	A5-1-4-4 能運用數量積表示兩向量的夾角，會用數量積判斷兩個平面向量的垂直關係。
	11	向量運算，含向量的加法、減法與係數積等運算。	11	A5-1-3-3 會用坐標表示平面向量的加減與數乘運算。 A5-1-2-1 通過實例，掌握向量加減法的運算，並理解其幾何意義。 A5-1-2-2 通過實例，掌握向量數乘的運算，並理解其幾何意義，以及兩個向量共線的含義。 A5-1-2-3 瞭解向量的線性運算性質及其幾何意義。
	11	向量在平面幾何證明題上的應用，如三角形兩邊中點連線定理、平行四邊形定理。	11	A5-1-1 通過力和力的分析等實例，瞭解向量的實際背景，理解平面向量和向量相等的含義，理解向量的幾何表示。 A5-1-5 經歷用向量方法解決某些簡單的平面幾何問題、力學問題與一些其他的實際問題的過程，體會向量是一種處理幾何等問題的工具，發展運算能力和解決實際問題的能力。 A5-1-3-1 瞭解平面向量的基本定理及其意義，能將平面向量表示為坐標軸上單位向量的線性組合。 A5-1-3-2 會用有序實數對表示平面向量。 A5-1-3-4 理解用坐標表示的平面向量共線的條件。
	11	直線參數式		

二、代數(19-17)

	11	點線距離	10	A2-2-1-6 探索並掌握兩點間的距離公式、點到直線的距離公式，會求兩條平行直線間的距離。	
空間坐標與向量	10	直角坐標	10	A2-2-4-1 通過具體情境，感受建立空間直角坐標系的必要性，瞭解空間直角坐標系，會用空間直角坐標系刻畫點的位置。	
			11	C1-3-1-1 經歷向量及其運算由平面向空間推廣的過程。	
				C1-3-1-2 瞭解空間向量的概念，瞭解空間向量的基本定理及其意義，能將空間向量表示為坐標軸上單位向量的線性組合，掌握空間向量的坐標表示。	
		11	平面法向量	11	C1-3-1-3 掌握空間向量的線性運算及其坐標表示。
	11	空間中直線與直線、直線與平面、和平面與平面的位置關係。	11	C1-3-2-1 理解直線的方向向量與平面的法向量。	
	11	向量內積	11	C1-3-2-2 能用向量語言表述線線、線面、面面的垂直、平行關係。	
				C1-3-2-3 能用向量方法證明有關線、面位置關係的一些定理（包括三垂線定理）。	
	11	平面夾角	11	C1-3-1-4 掌握空間向量的數量積及其坐標表示，能運用向量的數量積判斷向量的共線與垂直。	
11	平面夾角	11	C1-3-2-4 能用向量方法解決線線、線面、面面的夾角的計算問題，體會向量方法在研究幾何問題中的作用。		

二、代數(19-18)

空間坐標與向量	11	點面距離	10	A2-2-4-2 通過表示特殊長方體(所有稜分別與坐標軸平行)頂點的坐標,探索並得出空間兩點間的距離公式。
	11		10	A2-1-2-1 <b>點、線、面之間的位置關係</b> 借助長方體模型,在直觀認識和理解空間點、線、面的位置關係的基礎上,抽象出空間線、面位置關係的定義,並瞭解如下公理。 公理: ◆如果一條直線上的兩點在一個平面內,那麼這條直線在此平面內。 ◆過不在一條直線上的三點,有且只有一個平面。 ◆如果兩個平面有一個公共點,那麼它們有且只有一條過該點的公共直線。 ◆平行於同一條直線的兩條直線平行。 ◆空間中如果兩個角的兩條邊分別對應平行,那麼這兩個角相等或互補。  A2-1-2-2 以空間幾何的上述定義和公理為出發點,通過直觀感知、操作確認、思辨論證,認識和理解空間中線面平行、垂直的有關性質與判定。  通過直觀感知、操作確認,歸納出以下判定定理: ◆平面外一條直線與此平面內的一條直線平行,則該直線與此平面平行。 ◆一個平面內的兩條相交直線與另一個平面平行,則這兩個平面平行。 ◆一條直線與一個平面內的兩條相交直線垂直,則該直線與此平面垂直。



## 二、代數(19-19)

空間坐標與向量			10	<p>◆ 一個平面過另一個平面的垂線，則兩個平面垂直。 通過直觀感知、操作確認，歸納出以下性質定理，並加以證明：</p> <p>◆ 一條直線與一個平面平行，則過該直線的任一個平面與此平面的交線與該直線平行。</p> <p>◆ 兩個平面平行，則任意一個平面與這兩個平面相交所得的交線相互平行。</p> <p>◆ 垂直於同一個平面的兩條直線平行。</p> <p>◆ 兩個平面垂直，則一個平面內垂直於交線的直線與另一個平面垂直。</p> <p>A2-1-2-3 能運用已獲得的結論證明一些空間位置關係的簡單命題。</p>
	11	兩線距離 (平行線、歪斜線)		

## 三、圖形與幾何

項目	台灣		大陸	
	年級	說明	年級	說明
辨識、描述與定義幾何形體	1	S-1-01 能辨認、分類簡單平面圖形與立體形體	1~3	1-2-1-1-3 辨認長方形、正方形、三角形、平行四邊形、圓等簡單圖形
			1~3	1-2-1-1-7 能對簡單幾何體和圖形進行分類
	1	S-1-06 能描述某物在觀察者的前後、左右、上下及兩個物體的遠近位置		
			1~3	1-2-1-1-2 辨認從正面、側面、上面觀察到的簡單物體的形狀

三、圖形與幾何(6-1)

辨識、描述與定義幾何形體	4	S-2-01 能運用角、邊等構成要素，辨認簡單平面圖形		
	4	S-2-03 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的性質	1~3	1-2-1-1-4 透過觀察、操作，能用自己的語言描述長方形、正方形的特徵
	5	S-2-03 能透過操作，理解三角形內角和為 180 度，任兩邊和大於第三邊	4~6	2-2-1-1-7 透過觀察、操作，了解三角形兩邊之和大於第三邊、三角形內角和是 180 度
	5	S-2-06 能判斷一圖形是否滿足線對稱，並找出該圖形的對稱軸（可能不止一條）。 理解哪些常見平面圖形具有線對稱的性質  知道線對稱圖形的對應邊相等、對應角相等，並知道對稱軸兩側圖形全等  知道如何描繪一簡單平面圖形的線對稱圖形	1~3	1-2-1-3-3 通過觀察、操作，認識軸對稱圖形，並能在方格紙上畫出簡單圖形的軸對稱圖形
			4~6	2-2-1-3-1 用折紙等方法確定軸對稱圖形的對稱軸，能在方格紙上畫出一個圖形的軸對稱圖形
			7~9	3-2-1-2-1 1. 通過具體實例認識軸對稱，探索它的基本性質，理解對應點所連的線段被對稱軸垂直平分的性質。 2. 能夠按要求作出簡單平面圖形經過一次或兩次軸對稱後的圖形；探索簡單圖形之間的軸對稱關係，並能指出對稱軸。 3. 探索基本圖形（等腰三角形、矩形、菱形、等腰梯形、正多邊形、圓）的軸對稱性及其相關性質。 4. 欣賞現實生活中的軸對稱圖形，結合現實生活中典型實例了解並欣賞物體的鏡面對稱，能利用軸對稱進行圖案設計。
		4~6	2-2-1-1-10 能辨認從不同方位看到的物體的形狀和相對位置	

三、圖形與幾何(6-2)

辨識、描述與定義幾何形體	6	S-3-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題 (例如由三角形的內角和推知四邊形的內角和)		
	6	S-3-05 能認識正圓錐、正圓柱與正角柱		
	8	S-4-01 能理解長方體、正方體、正角錐、正角柱、圓錐、圓柱等立體的基本展開圖 S-4-04 能辨別柱體的展開圖	4~6	2-2-1-1-9 認識長方體、正方體和圓柱的展開圖
	8	S-4-01 能明確定義幾何圖形 (三角形、四邊形、多邊形及圓形) 及幾何圖形的點、線、角		
	8	S-4-08 能以最少性質辨認三角形，並能理解特殊三角形 (如正三角形、等腰三角形) 的定義及性質	7~9	3-2-1-1-4 1. 了解三角形有關概念 (內角、外角、中線、高、角平分線)，會畫出任意三角形的角平分線、中線和高，了解三角形的穩定性。 2. 探索並掌握三角形中位線的性質。 3. 了解全等三角形的概念，探索並掌握兩個三角形全等的條件。 4. 了解等腰三角形的有關概念，探索並掌握等腰三角形的性質和一個三角形是等腰三角形的條件；了解等邊三角形的概念並探索其性質。 5. 了解直角三角形的概念，探索並掌握直角三角形的性質和一個三角形是直角三角形的條件

### 三、圖形與幾何(6-3)

全等	4	S-2-04 能以對應頂點、對應角、對應邊的關係來描述全等的意義		
	8	S-4-08 能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義，並能理解三角形的全等性質 (SSS、SAS、ASA、AAS 及 RHS 全等性質)	7~9	3-2-1-1-4-3 了解全等三角形的概念，探索並掌握兩個三角形全等的條件
尺規作圖	8	S-4-07 能認識尺規作圖，並能熟練基本尺規作圖 (例如:平分線段、角平分線、垂直線、中垂線、平行線) 能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義	7~9	3-2-1-1-7 1. 完成以下基本作圖:作一條線段等於已知線段，作一個角等於已知角，作角的平分線，作線段的垂直平分線 2. 利用基本作圖作三角形:已知三邊作三角形;已知兩邊及其夾角作三角形; 已知兩角及其夾邊作三角形; 已知底邊及底邊上的高作等腰三角形。 3. 探索如何過一點、兩點和不在同一直線上的三點作圓。 4. 了解尺規作圖的步驟，對於尺規作圖題，會寫已知、求作和作法(不要求證明)
		S-4-08 能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義，並能理解三角形的全等性質 (SSS、SAS、ASA、AAS 及 RHS 全等性質)		
相似	6	S-3-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響	4~6	2-2-1-3-2 能利用方格紙等形式按一定比例將簡單圖形放大或縮小，體會圖形的相似
	9	S-4-12 能對簡單的相似多邊形指出對應邊成比例、對應角相等性質  S-4-13 能理解三角形的相似性質 平行線截比例線段性質 利用相似三角形對應邊成比例的觀念，應用在實際物的測量	7~9	3-2-1-2-4 1. 了解比例的基本性質，了解線段的比、成比例線段，通過建築、藝術上的實例了解黃金分割。 2. 通過具體實例認識圖形的相似，探索相似圖形的性質，知道相似多邊形的對應角相等，對應邊成比例，面積的比等於對應邊比的平方。 3. 了解兩個三角形相似的概念，探索兩個三角形相似的條件。

三、圖形與幾何(6-4)

相似			7~9	<p>4. 了解圖形的位似，能夠利用位似將一個圖形放大或縮小。</p> <p>5. 通過典型實例觀察和認識現實生活中物體的相似，利用圖形的相似解決一些實際問題（如利用相似測量旗杆的高度）。</p>
幾何證明	8	<p>S-4-05 能理解勾股定理</p> <p>能由簡單面積計算導出勾股定理</p> <p>能理解勾股定理的應用</p>	7~9	<p>3-2-1-4 （1）了解證明的含義</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 理解證明的必要性。</li> <li>2. 通過具體的例子，了解定義、命題、定理的含義，會區分命題的條件（題設）和結論。</li> <li>3. 結合具體例子，了解逆命題的概念，會識別兩個互逆命題，並知道原命題成立其逆命題不一定成立。</li> <li>4. 通過具體的例子理解反例的作用，知道利用反例可以證明一個命題是錯誤的。</li> <li>5. 通過實例，體會反證法的含義。</li> <li>6. 掌握用綜合法證明的格式，體會證明的過程要步步有據。</li> </ol> <p>（2）掌握以下基本事實，作為證明的依據</p>

三、圖形與幾何(6-5)

<p>幾何證明</p>	<p>8</p>	<p>S-4-05 能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同</p>	<p>7~9</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 一條直線截兩條平行直線所得的同位角相等。</li> <li>2. 兩條直線被第三條直線所截，若同位角相等，那麼這兩條直線平行。</li> <li>3. 若兩個三角形的兩邊及其夾角(或兩角及其夾邊，或三邊)分別相等，則這兩個三角形全等。</li> <li>4. 全等三角形的對應邊、對應角分別相等。</li> </ol> <p>(3) 利用(2)中的基本事實證明下列命題</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 平行線的性質定理(內錯角相等、同旁內角互補)和判定定理(內錯角相等或同旁內角互補，則兩直線平行)。</li> <li>2. 三角形的內角和定理及推論(三角形的外角等於不相鄰的兩內角的和，三角形的外角大於任何一個和它不相鄰的內角)。</li> <li>3. 直角三角形全等的判定定理。</li> <li>4. 角平分線性質定理及逆定理;三角形的三條角平分線交於一點(內心)。</li> <li>5. 垂直平分線性質定理及逆定理;三角形的三邊的垂直平分線交於一點(外心)。</li> <li>6. 三角形中位線定理。</li> <li>7. 等腰三角形、等邊三角形、直角三角形的性質和判定定理。</li> <li>8. 平行四邊形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形的性質和判定定理。</li> </ol>
-------------	----------	------------------------------------	--

### 三、圖形與幾何(6-6)

幾何證明			7~9	(4) 通過對歐幾里得《原本》的介紹，感受幾何的演繹體系對數學發展和人類文明的價值。
	9	S-4-11、S-4-15 能根據平行線截線性質作推理 S-4-15 能理解三角形外心、內心和重心的定義和相關性質 以三角形和圓的性質為題材來學習推理		3-2-1-1-4 6. 體驗勾股定理的探索過程，會運用勾股定理解決簡單問題；會用勾股定理的逆定理判定直角三角形。

### 四、集合、邏輯、排列組合與機率統計

項目	台灣		大陸	
	年級	說明	年級	說明
收集與整理資料	1	D-1-01 能對生活中的事件或活動做初步的分類與紀錄	1~3	1-3-1-1-2 對資料的收集、整理、描述和分析過程有所體驗
		能將紀錄以統計表呈現並說明		1-3-1-1-4 能根據簡單的問題，使用適當的方法(如計數、測量、實驗等)收集資料，並將資料記錄在統計表中
	3	能報讀生活中常見的直接對應(一維)表格(D-1-02)		
	4	D-2-01 能報讀生活中資料的統計圖，如長條圖、折線圖與圓形圖等	1~3	1-3-1-1-3 通過實例認識統計表和象形統計圖、條形統計圖，並完成相應的圖表
	4	D-2-02 能報讀較複雜的長條圖	4~6	2-3-1-1-5 能從報刊雜誌、電視等媒體中，有意識地獲得一些資料資訊，並能讀懂簡單的統計圖表

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-1)

收集與整理資料	5	D-2-03 能整理生活中的資料，並繪製成折線圖	4~6	2-3-1-1-3 通過實例，進一步認識條行統計圖(1格表示多個單位)，認識折線統計圖、扇形統計圖；根據需要，選擇條行統計圖、折線統計圖直觀、有效地表示資料。
	5	D-2-04 能整理有序資料，並製成長條圖與圓形圖		
	9	D-4-01 能將原始資料整理成次數分配表，並製作統計圖形，來顯示資料蘊含的意義		
			10	A3-2-2-1 通過實例體會分佈的意義和作用，在表示樣本資料的過程中，學會列頻率分佈表、畫頻率分佈直方圖、頻率折線圖、莖葉圖
	11	抽樣方法	10	A3-2-1-2 結合具體問題情境，理解隨機抽樣的必要性和重要性。
		A3-2-1-3 在參與解決統計問題的過程中，學會用簡單隨機抽樣方法從總體中抽取樣本；通過對實例的分析，瞭解分層抽樣和系統抽樣方法。		
		A3-2-1-4 能通過試驗、查閱資料、設計調查問卷等方法收集資料。		
二維資料呈現	3	D-1-03 能報讀生活中常見的交叉對應(二維)表格		
	5	D-2-04 能報讀生活中有序資料的統計圖		
	12	散佈圖(二元)	10	A3-2-3-1 通過收集現實問題中兩個有關聯變數的資料作出散點圖，並利用散點圖直觀認識變數間的相關關係。



四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-2)

基本統計量	9	D-4-02 能認識平均數、中位數與眾數均可以某種程度地表示整筆資料集中的位置 能認識平均數、中位數與眾數在不同狀況下，被使用的需求度有些微的差異	1~3	1-3-1-1-5 通過豐富的實例，了解平均數的意義，會求簡單資料的平均數（結果為整數）
		D-4-03 能認識全距，並理解全距大小的意義 能認識第 1、第 2、第 3 四分位數，及四分位數		
	11	期望值	10	A3-2-2-3 能根據實際問題的需求合理地選取樣本，從樣本資料中提取基本的數位特徵（如平均數、標準差），並作出合理的解釋。
	11	信賴區間及信心水準的解讀		
	11	標準差	10	A3-2-2-2 通過實例理解樣本資料標準差的意義和作用，學會計算資料標準差。
	12	相關係數 (二元)		
	12	迴歸直線	10	A3-2-3-2 經歷用不同估算方法描述兩個變數線性相關的過程，知道最小二乘法的思想，能根據給出的線性回歸方程的係數公式建立線性回歸方程。
			12	B2-1-4 通過對典型案例（如“學習成績與學習時間的關係”）的探究，瞭解回歸的基本思想、方法及其初步應用。
		12	C3-2-1-4 通過實例，理解取有限值的離散型隨機變數均值、方差的概念，能計算簡單離散型隨機變數的均值、方差，並能解決一些實際問題。	

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-3)

排列組合	11	加法 / 乘法原理、排容原理	12	C3-1-2 通過實例，理解排列、組合的概念；能利用計數原理推導排列數公式、組合數公式，並能解決簡單的實際問題。
	11	階乘與排列		
	11	組合		
	11	組合之應用 (巴斯卡三角、二項展開)	12	C3-1-3 能用計數原理證明二項式定理；會用二項式定理解決與二項展開式有關的簡單問題。
	11	樣本空間	10	A3-2-2-4 在解決統計問題的過程中，進一步體會用樣本估計總體的思想，會用樣本的頻率分佈估計總體分佈、用樣本的基本數位特徵估計總體的基本數位特徵；初步體會樣本頻率分佈和數位特徵的隨機性。 A3-2-2-5 會用隨機抽樣的基本方法和樣本估計總體的思想，解決一些簡單的實際問題；能通過對資料的分析為合理的決策提供一些依據，認識統計的作用，體會統計思維與確定性思維的差異。
	11	事件		
機率統計	9	D-4-04 能以具體情境介紹機率的觀念 能進行簡單的實驗以了解抽樣的不確定性、隨機性質等初步概念	1~3	1-3-1-2-1 初步體驗有些事件的發生是確定的，有些則是不確定的 1-3-1-2-2 能夠列出簡單試驗所有可能發生的結果 1-3-1-2-3 知道事件發生的可能性是有大小的 1-3-1-2-4 對一些簡單事件發生的可能性作出描述，並和同伴交換想法

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-4)

機率統計			4~6	<p>2-3-1-2-1 體驗事件發生的等可能性以及遊戲規則的公平性，會求一些簡單事件發生的可能性</p> <p>2-3-1-2-2 能設計一個方案，符合指定的要求</p> <p>2-3-1-2-3 對簡單事件發生的可能性作出預測，並闡述自己的理由</p>
			7~9	<p>3-3-1-2-1 在具體情境中了解機率的意義，運用列舉法(包括列表、畫樹狀圖)計算簡單事件發生的機率</p> <p>3-3-1-2-2 通過實驗，獲得事件發生的頻率；知道大量重複實驗時頻率可作為事件發生機率的估計值</p> <p>3-3-1-2-3 通過實例進一步豐富對機率的認識，並能解決一些實際問題</p>
			12	<p>C3-2-1-1 在對具體問題的分析中，理解取有限值的離散型隨機變數及其分佈列的概念，認識分佈列對於刻畫隨機現象的重要性。</p>
	11	機率性質	10	<p>A3-3-1 在具體情境中，瞭解隨機事件發生的不確定性和頻率的穩定性，進一步瞭解機率的意義以及頻率與機率的區別。</p>
			10	<p>A3-3-3 通過實例，理解古典概型及其機率計算公式，會用列舉法計算一些隨機事件所含的基本事件數及事件發生的機率。</p>

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-3)

機率統計			10	A3-2-1-4 能通過試驗、查閱資料、設計調查問卷等方法收集資料。
	11	亂數產生器(表)	10	A3-3-4 瞭解亂數的意義，能運用模擬方法（包括計算器產生亂數來進行模擬）估計概率，初步體會幾何概型的意義
	11	常態分布	12	C3-2-1-5 通過實際問題，借助直觀（如實際問題的直方圖），認識常態分佈曲線的特點及曲線所表示的意義。
	12	獨立事件	10	A3-3-2 通過實例，瞭解兩個互斥事件的概率加法公式。
			12	B2-1-1、C3-2-2-1 通過對典型案例（如“肺癌與吸煙有關嗎”）的探究，瞭解獨立性檢驗（只要求 2×2 列聯表）的基本思想、方法及初步應用。
	12	條件機率、二項分配	12	C3-2-1-3 在具體情境中，瞭解條件概率和兩個事件相互獨立的概念，理解 n 次獨立重複試驗的模型及二項分佈，並能解決一些簡單的實際問題。
	12	貝式定理		
	12	交叉分析 (僅談兩個變數的情況，需與條件機率相結合。)		
集合與邏輯	11	集合記號	10	A1-1-1-1 通過實例，瞭解集合的含義，體會元素與集合的“屬於”關係。

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-4)

集合與邏輯			10	<p>A1-1-1-2 針對不同的具體問題，能選擇自然語言、圖形語言、集合語言（列舉法或描述法）加以描述。</p> <p>A1-1-1-3 會用集合語言對已經學習過的某些數學物件加以描述，感受集合語言的意義和作用。</p>
			10	<p>A1-1-2-1 理解集合之間包含與相等的含義，能識別給定集合的子集。</p> <p>A1-1-2- 在具體情境中，瞭解全集與空集的含義。</p> <p>A1-1-3-1 理解兩個集合的聯集與交集的含義，會求兩個簡單集合的聯集與交集。</p> <p>A1-1-3-2 理解在給定集合中一個子集的補集的含義，會求給定子集的補集。</p>
			10	<p>A1-1-3-3 能使用 Venn 圖表達集合的關係及運算，體會直觀圖示對理解抽象概念的作用。</p>
			11	<p>B1-1-2、C1-1-2 通過數學實例，瞭解“或”、“且”、“非”的含義。</p>
			11	<p>B1-1-1-2、C1-1-1-2 理解必要條件、充分條件與充要條件的意義，會分析四種命題的相互關係。</p>
			11	<p>B1-1-1-1、C1-1-1-1 瞭解命題的逆命題、否命題與逆否命題（對偶命題）。</p>

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-5)

			12	B2-2-2-2 結合已經學過的數學實例，瞭解間接證明的一種基本方法：反證法；瞭解反證法的思考過程、特點。
演 算 法			12	A3-1-1-1 通過對解決具體問題過程與步驟的分析（如：二元一次方程組求解等問題），體會演算法的思想，瞭解演算法的含義。
				A3-1-1-2 通過模仿、操作、探索，經歷設計程式框圖表達解決問題的過程。在具體問題的解決過程中（如：三元一次方程組求解等問題），理解程式框圖的三種基本邏輯結構：順序、條件分支、迴圈。
				A3-1-2 基本演算法語句 經歷將具體問題的程式框圖轉化為程式語句的過程，理解幾種基本演算法語句——輸入語句、輸出語句、指派語句、條件語句、迴圈語句，體會演算法的基本思想。
				A3-1-3 通過閱讀中國古代數學中的演算法案例，體會中國古代數學對世界數學發展的貢獻，增強民族自豪感。
				B2-3-1 流程圖 1. 通過具體實例，進一步認識程式框圖。 2. 通過具體實例，瞭解工序流程圖（即統籌圖）。 3. 能繪製簡單實際問題的流程圖，體會流程圖在解決實際問題中的作用。

#### 四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(6-6)

				<p>B2-3-2 結構圖</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>通過實例，瞭解結構圖；運用結構圖梳理已學過的知識、整理收集到的資料資訊。</li> <li>結合做出的結構圖與他人進行交流，體會結構圖在揭示事物之間聯繫中的作用。</li> </ol>
--	--	--	--	---

#### 五、數學分析

項目	台灣		大陸	
	年級	內容	年級	內容
無窮與極限	10	數列一般式	11	<p>A4-3-1 通過日常生活中的實例，瞭解數列的概念和幾種簡單的表示方法（列表、圖像、通項公式），瞭解數列是一種特殊函數。</p> <p>A4-3-2-1 通過實例，理解等差數列、等比數列的概念。</p> <p>A4-3-2-3 能在具體的問題情境中，發現數列的等差關係或等比關係，並能用有關知識解決相應的問題。</p> <p>A4-3-2-4 體會等差數列、等比數列與一次函數、指數函數的關係。</p>
	10	等差級數與等比級數 (含數列與級數的基本概念。)	11	A4-3-2-2 探索並掌握等差數列、等比數列的通項公式和前 $n$ 項和公式。
	10	無窮數列極限		
	10	無窮等比級數極限 (介紹最基本的極限概念。)		
	12	函數極限的意義		

五、數學分析(2-1)

微分學	8	N-4-01 能求二次根的近似值	7~9	3-1-1-1-2-4 能用有理數估計一個無理數的大致範圍
	12	切線斜率 (以二次函數說明割線斜率的極限是切線的斜率。)		
	12	切線方程式	11	B1-3-1-2、C2-1-1-2
			12	通過函數圖像直觀地理解導數的幾何意義——切線。
	12	導數的定義	11	B1-3-1-1、C2-1-1-1
			12	通過對大量實例的分析，經歷由平均變化率過渡到暫態變化率的過程，瞭解導數概念的實際背景，知道暫態變化率就是導數，體會導數的思想及其內涵。
			11	B1-3-2-2 能利用給出的基本初等函數的導數公式和導數的四則運演算法則求簡單函數的導數。
			12	C2-1-2-2 能利用給出的基本初等函數的導數公式和導數的四則運演算法則求簡單函數的導數，能求簡單的複合函數（僅限於形如 $f(ax+b)$ ）的導數。
			11	B1-3-2-3、C2-1-2-3
			12	會使用導數公式表。
	12	多項式函數之導函數 (以二項式定理或分解因式求極限得出多項式的導函數，並介紹導函數常用的符號。)	11	B1-3-2-1 能根據導數定義，求函數 $y=c$ ， $y=x$ ， $y=x^2$ 的導數。
			12	C2-1-2-1 能根據導數定義求函數 $y=c$ ， $y=x$ ， $y=x^2$ ， $y=x^3$ ， $y=1/x$ ， $y=\sqrt{x}$ 的導數。
12	函數之漸增、漸減、臨界點	11	B1-3-3-1、C2-1-3-1	
		12	結合實例，借助幾何直觀探索並瞭解函數的單調性與導數的關係；能利用導數研究函數的單調性，會求不超過3次的多項式函數的單調區間。	



五、數學分析(2-2)

微分學	12	二階導數	11	B1-3-3-2 結合函數的圖像，瞭解函數在某點取得極值的必要條件和充分條件；會用導數求不超過 3 次的多項式函數的極大值、極小值，以及在給定區間上不超過 3 次的多項式函數的最大值、最小值。 C1-1-3-2 結合函數的圖像，瞭解函數在某點取得極值的必要條件和充分條件；會用導數求不超過三次的多項式函數的極大值、極小值，以及閉區間上不超過三次的多項式函數最大值、最小值；體會導數方法在研究函數性質中的一般性和有效性。
	12	函數圖形之凹性、反曲點		
	12	相對極值與二階檢定		
	12	求極值的應用問題	11	B1-3-4、C2-1-4 生活中的優化問題舉例。 如：使用利潤最大、用料最省、效率最高等優化問題，體會導數在解決實際問題中的作用。
			12	
		12	導數之運動意義	
	12	牛頓法求根		
積分學	12	黎曼和與面積 1. 直觀說明黎曼和對一再細分的分割所取的極限是面積。 2. 在等分割時，對 $y = x^2$ 求出黎曼和的極限。	12	C2-1-5-1 通過實例（如求曲邊梯形的面積、變力做功等），從問題情境中瞭解定積分的實際背景；借助幾何直觀體會定積分的基本思想，初步瞭解定積分的概念。
	12	反導函數的定義		
	12	微積分基本定理	12	C2-1-5-2 通過實例（如變速運動物體在某段時間內的速度與路程的關係），直觀瞭解微積分基本定理的含義。
	12	自由落體運動方程式		
	12	定積分之黎曼和估計		

## 附錄五、台灣與韓國數學課程綱要比較對照表

以下是九年一貫數學學習領域修訂綱要以及 95 年高中數學暫行綱要與韓國數學課程標準（1997 年公佈）之對照分析。表格中說明裡的括弧數字為能力指標，在九年一貫這部分，由於韓國的課程標準並沒有類似能力指標之 index，他們將國民共同教育基本課程中的數學部分區分為六個領域：「數與計算 (n)」、「幾何 (g)」、「測量 (m)」、「機率與統計 (d)」、「文字與公式 (c)」、「規則性與函數 (f)」，而每個領域分為十個階段，每個階段就是一個年級，而每個年級又分為 A、B 兩階段，因此我們給予編號，例如在「幾何 (g)」領域下〈3-A 階段〉（三年級上學期）的第一個內容的能力指標以 g.3-A.1 表示，以此類推。

在高中這部分，台灣沒有給予能力指標之 index，韓國因為內容比較多，分的比較細，所以我們給予類似能力指標之 index 以方便對照。而韓國高一數學課程是國民共同教育基本課程數學科的第十階段（十年級），因此能力指標沿用中小學那部分的計法，從高二起數學課程有數學 I (M1)（想進修大學的高二學生適合學習的科目）、數學 II (M2)（適合想進修理工大學的高三學生）、微積分 (Calc)（適合想進修理工大學的高三學生），而每個課程裡面還細分代數 (a)、解釋 (c)、機率與統計 (d)、幾何 (g) 這些部分，因此我們給予編號，例如「數學 I」中代數部分第一項的第三點的能力指標以 M1.a.1.3 表示，以此類推。

### 一、數與量

		台灣綱要		韓國綱要	
項目	年級	說明		年級	說明
整數	1	100 以內的數 (N-1-01)		1	50 以內的數 (n.1-A.1)
		能理解加、減法的意義，解決生活中的問題 (N-1-02)			100 以內的數 (n.1-B.1)
	2	1000 以內的數 (N-1-01)		2	能理解加、減法的意義 (n.1-A.2)
		能理解乘法的意義，解決生活中簡單整數倍的問題 (N-1-03)			1000 以內的數 (n.2-A.1)
	3	10000 以內的數 (N-1-01)		3	認識乘法 (n.2-A.3)
		能理解除法的意義，解決生活中的問題，並理解整除、商與餘數的概念 (N-1-04)			10000 以內的數 (n.3-A.1)
	4	億、兆 (N-1-01)		4	引進除法 (n.3-A.3)
				4	五位以上的數 (n.4-A.1)

一、數與量(4-1)

整數	正整數	6 7	能理解因數、倍數、質因數、最大公因數和最小公倍數，並熟練質因數分解的方法 (N-3-01、N-3-02)	7	能理解因數分解法，並做自然數的因數分解法 能計算最大公因數與最小公倍數 (n.7-A.2)
				7	能表示自然數的十進位與二進位制 (n.7-A.3)
		10	輾轉相除法		
		10	介紹數學歸納法，並應用於證明	11	理解數學歸納法的原理，並運用於證明自然數 $n$ 的真命題 (M1.a.3.3)
	負數	7	能以正、負表徵生活中相對的量，並認識負數是性質 (方向、盈虧) 的相反 (N-3-08)	7	能理解整數與有理數之間的大小關係 (絕對值、正數、負數) (n.7-A.4)
有理數	小數	3	認識一位小數，並學習一位小數 (整數兩位) 的加減直式計算 (N-1-10)	3 4	小數 (一位小數) 的理解 (n.3-B.4) 小數的加法與減法 (n.4-B.4)
		4	認識 2、3 位小數及其四則運算 (N-2-10)	4	小數 (三位) 的加法與減法 (n.4-B.2、n.4-B.4)
		5	能用直式處理乘數為小數的計算 (N-2-12)	5	小數的乘法與除法 (n.5-B.1)
		6	能理解除數為小數的計算 (N-3-03)		
				8	能理解有理數與循環小數的關係 (n.8-A.2)
		分數	3	同分母加減運算 (分母小於 12) (N-1-09)	4
	4		能認識真分數、假分數與帶分數 (N-2-07)	4	各種分數 (n.4-A.3)
	4 5		等值分數、約分、擴分的意義 (N-2-08)	5	約分與通分 (n.5-A.2)
	5		異分母的比較與加減 (N-2-09)	5	異分母分數的比較、加減 (n.5-A.2、n.5-A.3)
	5		能理解分數乘法的意義及計算方法 (N-2-11)	5	分數的乘法 (n.5-A.4)
	6		能理解除數為分數的意義及計算方法 (N-3-03)	6	能計算除數為分數的除法 (n.6-B.1)

一、數與量(4-2)

有理數	分數	10	有理化分子/分母	9	分母的有理化 (m.9-A.2)
	比例	6	比、比值、正比、反比 (N-3-05)	6	比與比率 (f.6-A.1) 連比與比例分配 (f.6-A.2)
	絕對值	7	理解絕對值在數線上的意義 (N-3-10)	7	能理解整數與有理數之間的大小關係(絕對值、正數、負數) (n.7-A.4)
無理數		8	二次方根的四則運算 (N-4-02)	9	熟練含根號的加、減、乘、除 (m.9-A.2)
		10	介紹基本的平方根之四則運算。		
		10	介紹無理數如 $\sqrt{n}$ 和 $\pi$ ，其中n為非完全平方的正整數。含 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。	10	理解無理數的意義 (c.10-A.1)
實數		10	實數	10	理解實數計算的性質以及大小關係 (m.10-A.3)
複數		10	虛數，介紹i的由來	10	理解虛數、虛數單位 (m.10-A.4)
		10	複數之四則運算	10	理解複數的意義，並計算(m.10-A.4)
量與實測	長度、容量、質量	1	能認識長度，並作直接比較 (N-1-14)	1	量的比較 (m.1-A.1)
		2 3	能使用日常測量工具進行實測活動，理解其單位和刻度結構量的比較 (N-1-16、N-1-17)	2	能認識 cm、m，測量長度 (m.2-A.1)
				2	能由猜測物體的長度和測量長度增加對量的感覺 (m.2-B.1)
				3	能認識 mm 與 km 的單位 (m.3-A.1) 能認識 L 和 mL，了解其概念 (m.3-B.1)
				4	能認識 g 和 kg 單位，並了解其關係 (m.4-A.3)
		4	能認識測量的普遍單位，並處理相關的計算問題 (N-2-15)	2	算出長度的加、減法 (m.2-B.1)
				3	能理解 1cm 和 1mm、1km 和 1m 的關係 (m.3-A.1) 能計算容量的加、減法 (m.3-B.1)
4	能算出重量的和與差 (m.4-A.3)				

一、數與量(4-3)

量 與 實 測	角 度	3	能認識角，並比較大小 (N-1-14、N-1-15)	4	能認識 1 度，並利用量角器測量角的大小 能依已給定的角度畫出角度 (m.4-A.1)			
		4	會用量角器實測角度或畫出指定的角 (如:30 度、45 度、60 度、90 度、120 度、135 度、150 度) (N-1-16)					
	面 積 、 體 積 、 周 長	2	2	能認識面積，並作直接比較 (N-1-14)	5	理解面積的概念，並認識平方公分、平方公尺 能測量面積 (m.5-A.2)		
			3	能利用間接比較或個別單位實測的方法比較不同面積的大小，並認識面積單位「平方公分」 (N-1-15)				
			4	能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並作相關計算 (N-2-15)				
			5	能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並作相關計算 (N-2-15、N-2-16)				
			4	能理解長方形和正方形的面積與周長公式 (N-2-17)				
		4	4	能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較不同體積的大小，並認識體積單位「立方公分」 (N-1-15、N-1-16)	6	理解容量，認識立方公分與立方公尺 (m.6-A.1)		
			5	能理解體積單位「立方公尺」，及「立方公分」、「立方公尺」間的關係，並作相關計算 (N-2-15、N-2-16)				
		5	5	能理解三角形、平行四邊形和梯形的面積公式 (N-2-19)	5	能計算三角形、平行四邊形和梯形的面積 (m.5-A.2、m.5-B.2)		
			5	能理解長方體和正方體的體積公式 (N-2-17)				
			6	能理解簡單柱體的體積 (N-3-17)				
	8		6	能計算柱體表面積的問題 (S-4-04)			6	能計算直立柱體的表面積、容積和正立方體的容積 (m.6-A.1) 圓柱的表面積與容積 (m.6-B.2)
			8	能計算柱體表面積的問題 (S-4-04)				
	時 間	1	1	能報讀整點、半點的時刻 (N-1-13)	1	報讀鐘面上整點、半點的時刻 (m.1-B.1)		
			2	能報讀幾點幾分 (N-1-13)			2	能報讀鐘面上的時刻是幾點幾分 (m.2-A.2)

一、數與量(4-4)

量與實測	時間	3	認識日、時、分、秒的關係，並能作同單位時間量的加減計算 (N-1-13)	2	理解一個小時有 60 分鐘，並能夠運用互換 了解年、月、星期、日、時的相互關係 (m.2-A.2)
		4	能解決複名數的時間量計算，以及時刻與時間量的加減問題 (N-2-15)		
	圓面積、圓周長	6	可由圓周長的實測理解圓周長與直徑成比例。能理解圓面積公式，並能計算簡單扇形面積 (N-3-16)	6	能透過實測直徑和圓周長理解圓周率，並計算圓周長與圓的面積 (m.6-B.1)
7				能計算扇形面積 (m.7-B.2)	
估算		2	認識公分、公尺，並能作相關的實測、估測與計算 (N-1-16、N-1-17)	2	認識 1m，估計各種物體的長度 (m.2-B.1)
		3	認識長度單位 (毫米、公分、公尺)、容量單位 (公升、毫升)、重量單位 (公斤、公克)，並能作相關的實測、估測與計算 (N-1-17)	2	能由猜測物體的長度和測量長度增加對量的感覺能猜測不同容器的容量，並透過實測增加對量的感覺 (m.2-A.1、m.2-B.1)
				3	能猜測不同容器的容量，並透過實測增加對量的感覺 (m.3-B.1)
				4	能測量物體的重量，並以 g 或 kg 表示 (m.4-A.3)
		4	能用四捨五入法取概數，並作加、減之估算 (N-2-05)	4	理解四捨五入的意義 (m.4-B.1)
		5	能用四捨五入法對小數在指定位數取概數，並作估算 (N-2-05)		
		6	使用方格紙估算曲線所圍區域面積 (N-3-15)		
				8	能理解近似值與誤差 (m.8-A.1) 能計算近似值的加減法 (m.8-A.2)
8	能求二次根的近似值 (N-4-01)	9	能認識平方根的意義 利用計算機取得平方根的近似值，不需要教學生如何解平方根 (n.9-A.1)		

二、代數 (含樣式、關係、函數與坐標圖形)

台灣綱要			韓國綱要	
項目	年級	說明	年級	說明

能以數學符號表示數學式子	2	能將具體情境中單步驟的加減問題列成算式填充題，並解釋式子與原問題情境的關係 (A-1-02)	2	以文章描述的題目，寫出公式來解決 (c.2-B.1)
	3	能將具體情境中單步驟的乘、除問題列成算式填充題，並解釋式子與原問題情境的關係 (A-1-02)		
	4	能用中文簡計式表示長方形和正方形的面積公式與周長公式 (A-2-05)	7	能利用文字簡單的表示公式 (c.7-A.1)
	5	能用中文簡計式表示長方體和正方體的體積公式 (A-2-05)		
	4	能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式，並能解釋式子與原問題情境的關係 (A-2-04)	1	能理解使用□的加法和減法 (c.1-B.1)
			2	以文章描述的題目，寫出公式來解決 (c.2-B.1)
	5	能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題，並嘗試解題及驗算其解 (A-2-04)	2	能利用 □ 做簡單的加減法，並求其值 (c.2-A.1) 能做出適合公式的題目 (c.2-A.2) 能在簡單的加、減、乘法等式中求未知數 (c.2-B.2)
6	能使用 x, y...等未知數符號，將具體情境中問題列成兩步驟的算式題，並嘗試解題及驗算其解 (A-3-03)	6	能將兩個數的對應關係，用 □、△表示 (f.6-B.1)	
數學式與方程式的操作	1	能在具體情境中，認識加法的交換律、結合律，並運用於簡化計算 (A-1-03)		
	2	能在具體情境中，認識乘法的交換律，並運用於簡化計算 (A-1-03)		
	1	能在具體情境中，認識加減互逆 (A-1-04)	2	能在簡單的加、減、乘法等式中求未知數□的值 (c.2-B.2)
	2	能理解加減互逆，並運用於驗算與解題 (A-1-04)		

二、代數(7-1)

數學式與方程式的操作	3	能在具體情境中，認識乘除互逆 (A-1-05)	2	能在簡單的加、減、乘法等式中求未知數□的值 (c.2-B.2)
	4	能理解乘除互逆，並運用於驗算與解題 (A-2-02)		
	4	能在具體情境中，理解乘法結合律、先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積 (A-2-01)		
	5	能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算 (A-2-03)		
	6	能理解等量公理 (A-3-02)		
數量間的變化與關係			1	能在 100 以內數字排列中找出規則 (f.1-B.2)
			2	1 到 100 的數字排列中，找出高難度的規則 (f.2-A.2)
			4	能說明多樣的變化規則 (f.4-A.1)
			5	透過移動的方法做出規則 (f.5-A.1)
	6	能在比例的情境或幾何公式中，透過列表的方式認識變數 (A-3-07)		
	7	能嘗試以代入法或列舉法求一次方程式的解，並檢驗解的合理性 能熟練符號的代數操作 能認識變數與函數 能舉出例子，說明一次函數是一種特殊的比例對應關係 (A-3-07)	7	能理解正比例與反比例的關係，並以算式表示其關係。 能理解函數的概念 值域與定義域 (在「用詞與符號」提到) (f.7-A.1)
		10	理解函數的意義 (f.10-B.1)	
坐標	7	能運用直角坐標系來標定位置 能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形 (A-3-11、A-3-12)	7	能理解平面直角坐標系 (f.7-A.1)
			8	一次函數與圖表 (f.8-A.1) 運用一次函數 (f.8-A.2)



二、代數(7-2)

坐標	7	能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形 能在直角坐標平面上認識解二元一次聯立方程式的解 (A-3-11、A-3-13)		
	10	複習平面坐標系		
平面坐標與向量	10	介紹複數平面(只強調一一對應關係)		
	10	複數之極式(棣美弗定理, 1 的 n 次方根)		
	10	介紹向徑、輻角與極坐標之概念		
	11	向量運算(加、減、合成、平行、長度、純量乘)	12	計算向量的加、減、乘法以及長度(M2.g.4.1)
	11	向量內積	12	理解兩個向量內積, 並計算(M2.g.4.2)
	11	向量應用於平面幾何證明題, 如三角形兩邊中點連線定理、平行四邊形定理		
	11	直線參數式		
			10	計算兩點之間的距離(g.10-B.1)
	11	點到直線的距離	10	計算點與直線間的距離(g.10-B.2)
	10	分點坐標	10	理解線段的外分點與內分點的意義, 求外分點、內分點的坐標(g.10-B.1)
	11	內積的應用(垂直投影、兩直線的夾角、柯西不等式)		
空間坐標與向量	11	空間坐標系	12	計算坐標空間上的點坐標(M2.g.3.1)
	11	空間概念(空間中直線與直線、直線與平面、平面與平面之位置關係)	12	理解直線與直線、直線與平面、平面與平面的位置關係(M2.g.2.1)
			12	在坐標空間上計算兩點距離(M2.g.3.2)
			12	在坐標空間上計算內分點與外分點的坐標(M2.g.3.3)
	11	平面法向量	12	法線向量(M2.g.4.3)
	11	直線與平面方程式	12	能在坐標空間找出直線與平面方程式(M2.g.4.3)

二、代數(7-3)

空間坐標與向量	11	向量內積	12	理解兩個向量的內積，並計算 (M2.g.4.2)
	11	平面夾角		
	11	點到面的距離		
	11	兩線距離 (平行線、歪斜線的公垂線段長)		
	11	內積的應用 (柯西不等式、正射影)	12	理解正投射，並計算 (M2.g.2.3)
基本函數	10	直線的點斜式(斜率)	8	直線的斜率 (f.8-A.1)
	10	(一次、二次、n次)多項式函數	10	多項式函數 (f.10-B.1) (在「用詞與符號」提到)
			10	理解有理函數、漸近線 能描繪函數 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (f.10-B.3)
			10	理解無理函數 能描繪函數 $y = \sqrt{ax+b} + c$ (f.10-B.3)
	7	認識指數的記號與指數律 (N-3-12)		
	10	指數函數及其圖形	11	理解指數函數的意義 描繪指數函數，並理解其性質 (M1.c.2.1)
	10	對數函數及其圖形	11	理解對數函數的意義 描繪對數函數，並理解其性質 (M1.c.3.1)
	10	銳角三角函數 (30°或45°等特殊角)	9	能理解三角函數(sin、cos、tan)的意義，計算簡單的三角函數 (m.9-B.1) 能在生活中運用三角函數 (m.9-B.2)
	10	廣義角與弧度量(radian)	10	能理解角與弧度的意義 (f.10-B.4)
	10	廣義角的三角函數(sin cos tan)	10	理解三角函數的意義 (f.10-B.4)
	10	三角函數值表	10	理解 sin、cos、tan 表與其性質 (f.10-B.4)
	10	三角函數之關係(和角、倍角、半角、平方和、餘角、補角等)	12	理解三角函數的和差、倍角和半角公式 (Calc.c.1.1)
	10	三角函數定理(正/餘弦)		

二、代數(7-4)

函數性質與運算	10	函數之和差(正、餘弦函數之疊合)		
			10	理解函數的合成(透過二次以下的多項函數、有理函數、無理函數了解合成函數)(f.10-B.1)
			10	知道函數的一對一對應(f.10-B.1)
			10	理解反函數(透過二次以下的多項函數、有理函數、無理函數了解反函數)(f.10-B.1)
			10	理解週期函數(f.10-B.1)
			12	能理解函數的連續性(M2.c.1.2)
一元一次方程式	7	能由具體情境中列出一元一次方程式，並理解其解的意義 能以等量公理來解一元一次方程式，並做驗算 能以移項法則來解一元一次方程式，並做驗算 (A-3-08)	7	使用文字與公式的計算(c.7-A.1) 能理解‘等式’的性質並能解決一次方程式(c.7-A.2) 一次方程式的運用(c.7-A.3)
二元一次方程式	7	能由具體情境中列出二元一次方程式，並理解其解的意義(A-3-10) 能由具體情境中列出二元一次聯立方程式，並理解其解的意義 能在直角坐標平面上認識解二元一次聯立方程式的解 能熟練使用消去法解二元一次聯立方程式 (A-3-13)	8	兩個未知數的一次聯立方程式(c.8-A.2) 運用一次聯立方程式(c.8-A.3)
一元二次方程式	8	能由具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義 能利用一元二次方程式解應用問題(A-4-05)	9	能理解二次方程式與其解(c.9-A.2)

二、代數(7-5)

多項式	10	多項式的四則運算 (含綜合除法)	10	能做多項式的加、減、乘、除法 (c.10-A.1) (綜合除法, 在「用詞與符號」提到)	
	10	餘式與因式定理, 含整係數多項式 的一次因式檢驗法	10	理解餘式定理, 並運用在問題解決 (c.10-A.2)	
	10	公因式、公倍式, 用輾轉相除法求 最高公因式	10	能理解因式與倍式的意義, 並計算最大公因 式與最小公倍式 (c.10-A.4)	
	10	一元一次方程式根的討論, 特別是 判別式小於 0 的情況	10	能理解方程式判別式的意義(無解、唯一 解、無限多解) (c.10-A.6)	
	10	代數基本定理的介紹			
	10	共軛複根(實係數多項式方程式虛 根成對定理)			
	10	勘根定理(中間值定理)			
因式 分解	8	能理解因式、倍式、公因式與因式 分解的意義 能利用乘法公式與十字交乘法做 因式分解 能利用提出公因式與分組分解法 分解二次多項式 (A-4-04)	9	多項式的乘法與因式分解 (c.9-A.1)	
	10	因式分解	10	能熟練因式分解 (c.10-A.3)	
函 數 圖 形	一次 函 數 圖 形	7	能在直角坐標平面上描繪一次函 數的圖形 (A-3-11)	8	能畫出一次函數的圖表 (f.8-A.1) 運用一次函數 (f.8-A.2)
	二次 函 數 圖 形	9	能理解二次函數的樣式並繪出其 圖形 能利用配方法繪出二次函數的圖 形 能計算二次函數的最大值與最小 值 能應用二次函數最大值與最小值 的簡單性質 (A-4-06)	9	二次函數與其圖形 (f.9-A.1)

二、代數(7-6)

函數圖形	二次函數圖形	9	能理解二次函數的圖形與拋物線的概念 能理解拋物線的線對稱性質 (A-4-07)	9	二次函數與其圖形 (f.9-A.1)
	三角函數圖形	10	三角函數的圖形，只談正弦、餘弦和正切	10	三角函數的圖形 (f.10-B.4)
線性代數		10	以兩直線的關係說明二元一次方程組求解的幾何意義	8	透過兩個一次函數的圖表，了解一次聯立方程式的解為兩條直線的交點 (f.8-A.2)
		11	一次方程組 (限二元、三元)	10	能解決三個未知數的一次聯立方程式與兩個未知數的二次聯立方程式 (c.10-A.6)
		12	矩陣表達式	11	理解矩陣的意義 (M1.a.2.1)
		12	矩陣的意義	11	理解矩陣的意義 (M1.a.2.1)
		12	矩陣的加法與純量積乘法運算	11	理解矩陣的加、減、乘法，並計算 (M1.a.2.1)
		12	矩陣的乘法及意義(含乘法的代數性質，轉移矩陣)		
		12	矩陣的列運算		
		12	列運算求反矩陣(2*2、3*3)即二階反矩陣之行列式求法	11	能求二階方正的反矩陣 (M1.a.2.1)
		11	高斯消去法 以解文字為係數的二元一次方程組介紹克拉瑪公式	11	理解矩陣的除法。 能利用反矩陣解一次聯立方程式。(M1.a.2.2)
		12	增廣矩陣		
		11	二階行列式		
		11	以三階行列式求平面上平行四邊形的面積		
		12	行列式性質(列運算、cofactor 降階)		
		12	用行列式表達面積與體積		

## 二、代數(7-7)

二次 曲線 與 曲面	11	圓方程式	10	圓的方程式 (g.10-B.3)
	11	圓與直線之關係(切、割)	10	理解圓與直線之間的位置關係 (g.10-B.3)
	9	兩圓的位置關係 (S-4-14)	10	了解兩個圓之間的位置關係 (g.10-B.3)
	11	拋物線之方程式	12	理解拋物線的意義，並計算其方程式 (M2.g.1.1)
	11	橢圓方程式	12	理解橢圓的意義，並計算其方程式 (M2.g.1.2)
	11	雙曲線方程式	12	理解雙曲線的意義，並計算其方程式 (M2.g.1.3)
	11	球面方程式	12	球的方程式 (M2.g.3.4)
	11	球與平面之關係		
			12	拋物線(軸、頂點、焦點、準線)、橢圓(焦點、頂點、中心、長軸、短軸)、雙曲線(焦點、頂點、中心、主軸)，不教學生離心率 (M2.g.1.1、M2.g.1.2、M2.g.1.3) (在「用詞與符號」提到)
	11	雙曲線的漸進線		
11	圓錐曲線物理(光學)性質			
不等式	7	能由具體情境中列出一元一次不等式 能利用移項法則在數線上找出一元一次不等式的解 能由具體情境中描述一元一次式解的意義 (A-3-09)	8	一次不等式與一次聯立不等式 (c.8-A.4) 運用一次不等式與一次聯立不等式 (c.8-A.5)
	12	柯西不等式		
	12	算幾不等式		
	12	以分解因式解一元多項式不等式並在數線上標示解區間	12	解決三次不等式與四次不等式(簡單的因式分解不等式) (M2.a.2.1)
	12	解二元一次多項式不等式並在坐標平面上標示解區域		
	12	二元線性規劃問題		
			10	解決二次不等式與二次聯立不等式 (c.10-A.7)
	12	利用代數方法、幾何方法(圖形)，以及絕對不等式求函數在限制條件下的極大、極小	10	解決含絕對值的一次不等式 (c.10-A.7)
			10	解決簡單的三角函數不等式 (f.10-B.3)
			11	解決指數不等式 (M1.c.2.2) 解決對數不等式 (M1.c.3.2)

## 三、圖形與幾何

台灣綱要			韓國綱要	
項目	年級	說明	年級	說明

辨 識 、 描 述 與 定 義 幾 何 形 體	1	能辨認、分類簡單平面圖形與立體形體 (S-1-01)	1	能由觀察各種物體，找出四邊形、三角形、圓形(g.1-B.1)
			1	能由觀察各種物體的外觀，分辨出直立方體、正圓柱、球的形體 (g.1-A.1)
	1	能描繪或仿製簡單幾何形體 (S-1-02)	1	能描繪或仿製簡單幾何形體，了解基本的幾何型體 (g.1-A.2)
	1	能描述某物在觀察者的前後、左右、上下及兩個物體的遠近位置 (S-1-06)		
	4	能運用角、邊等構成要素，辨認簡單平面圖形 (S-2-01)	2	能認識平面圖形的構成要素，並比較。(g.2-A.1)
	4	能透過操作，認識基本三角形與四邊形的性質 (S-2-03)	3	能理解直角三角形、長方形、正方形。(g.3-A.1)
	5	能透過操作，理解三角形內角和為 180 度，任兩邊和大於第三邊 (S-2-03)	4	能計算三角形的內角和 (g.4-A.2)
	5	能判斷一圖形是否滿足線對稱，並找出該圖形的對稱軸 (可能不止一條)。理解哪些常見平面圖形具有線對稱的性質 知道線對稱圖形的對應邊相等、對應角相等，並知道對稱軸兩側圖形全等 知道如何描繪一簡單平面圖形的線對稱圖形 (S-2-06)	5	能認識線對稱和點對稱的性質，並能畫出。(g.5-B.1)
	6	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題 (例如由三角形的內角和推知四邊形的內角和) (S-3-01)	4	能計算三角形與四邊形的內角和 (g.4-A.2)
	6	能認識正圓錐、正圓柱與正角柱 (S-3-05)	6	能理解角柱與角錐的構成要素與性質 (g.6-A.1)
8	能利用形體的幾何性質來定義某一類形體 (S-4-01)	7	能認識圓心、圓心角、扇形、弧、弦的意義，並理解圓心角與弧的概念 (g.7-B.3)	

三、圖形與幾何(2-1)

辨識、描述與定義幾何形體	8	能理解長方體、正方體、正角錐、正角柱、圓錐、圓柱等立體的基本展開圖 (S-4-01)	5	能畫出直立柱體與正立方體的展開圖 (g.5-A.1)
	8	能辨別柱體的展開圖 (S-4-04)	6	能畫出角柱的展開圖 (g.6-A.1) 能理解圓柱的展開圖 (g.6-B.1)
	8	能明確定義幾何圖形 (三角形、四邊形、多邊形及圓形) 及幾何圖形的點、線、角 (S-4-01)	7	能理解點、線、面、角的基本性質 (g.7-B.1)
	8	能以最少性質辨認三角形,並能理解特殊三角形 (如正三角形、等腰三角形) 的定義及性質 (S-4-08)	4	能理解等腰三角形和正三角形 (g.4-A.1)
	9	能理解圓的幾何性質 (S-4-14)	9	能在圓中理解弦的概念 (g.9-B.3) 能理解圓周角 (g.9-B.4)
全等	4	能以對應頂點、對應角、對應邊的關係來描述全等的意義 (S-2-04)	7	能理解三角形的全等條件 (g.7-B.2)
	8	能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義,並能理解三角形的全等性質 (SSS、SAS、ASA、AAS 及 RHS 全等性質) (S-4-08)		
尺規作圖	8	能認識尺規作圖,並能熟練基本尺規作圖 (例如:平分線段、角平分線、垂直線、中垂線、平行線)	5	能利用尺與圓規,畫適合條件的三角形 能認識線對稱跟點對稱的性質,並能畫出 (g.5-B.1)
		能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義 (S-4-07)	7	能做出簡單的圖形 (g.7-B.2)
	8	能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義,並能理解三角形的全等性質 (SSS、SAS、ASA、AAS 及 RHS 全等性質) (S-4-08)	7	做圖活動 (g.7-B.2)
相似	6	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響 (S-3-02)		
	9	能對簡單的相似多邊形指出對應邊成比例、對應角相等性質 (S-4-12) 能理解三角形的相似性質 平行線截比例線段性質 (S-4-13)	8	圖形的相似 (g.8-B.2) 運用相似 (g.8-B.3)



### 三、圖形與幾何(2-2)

相似	9	利用相似三角形對應邊成比例的觀念，應用在實際物的測量 (S-4-13)	8	圖形的相似 (g.8-B.2) 運用相似 (g.8-B.3)
幾何證明	8	能理解勾股定理 能由簡單面積計算導出勾股定理 能理解勾股定理的應用 (S-4-05)	9	理解勾股定理並證明 (g.9-B.1) 運用勾股定理 (g.9-B.2)
	8	能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同 (S-4-10)	9	不需要證明勾股定理的逆定理，透過問題情境簡單地教導學生 (g.9-B.1)
	9	能根據平行線截線性質作推理 (S-4-11、S-4-15)	8	能證明平行線之間，線段長度比的性質，並運用 (g.8-B.3)
	9	能理解三角形外心、內心和重心的定義和相關性質 以三角形和圓的性質為題材來學習推理 (S-4-15)	8	能導出三角形的重心，並運用 (g.8-B.3)

### 四、集合、邏輯、排列組合與機率統計

		台灣綱要	韓國綱要	
項目	年級	說明	年級	說明
收集與整理資料	1	能對生活中的事件或活動做初步的分類與紀錄 能將紀錄以統計表呈現並說明 (D-1-01)	1	能將人或事物按照已定的一個基準，分類與整理 (d.1-A.1)
			2	能找出生活上具體的資料，並將資料以表來表示 (d.2-B.1)
	3	能報讀生活中常見的直接對應 (一維) 表格 (D-1-02)		
	4	能報讀生活中資料的統計圖，如長條圖、折線圖與圓形圖等 (D-2-01)	2	能認識以表或圖來表示資料的大小 (d.2-B.1)
	4	能報讀較複雜的長條圖 (D-2-02)		
	5	能整理生活中的資料，並繪製成折線圖 (D-2-03)	4	能將連續變量的資料做成表，畫折線圖，並從中發現很多事實 (d.4-B.1)
	5	能整理生活中的資料，並製成長條圖 (D-2-03)	3	能收集生活上發生的實際資料，並將資料分類、整理做成表，將表用長條圖來表示 (d.3-B.1)

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(2-1)

收集與整理資料	6	能整理生活中的資料，並製成圓形圖 (D-3-01)	6	能認識、柱狀圖、圓餅圖，並運用 (d.6-A.1)
	9	能將原始資料整理成次數分配表，並製作統計圖形，來解釋資料蘊含的意義 (D-4-01)	7	統計圖表 (d.7-B.1) 相對次數的分佈與累積次數的分佈 (d.7-B.2)
	11	抽樣調查法 (含簡單隨機抽樣)	11	任意抽樣 (在「用詞與符號」提到) (M1.d.3.2)
二維資料呈現	3	能報讀生活中常見的交叉對應 (二維) 表格 (D-1-03)		
	5	能報讀生活中有序資料的統計圖 (D-2-04)		
	12	散佈圖(二元)	10	理解散佈圖 (d.10-A.1)
基本統計量	9	能認識平均數、中位數與眾數均可以某種程度地表示整筆資料集中的位置 能認識平均數、中位數與眾數在不同狀況下，被使用的需求度有些微的差異 (D-4-02)	5	能理解平均的意義，能算出資料的平均 (d.5-B.1)
		能認識全距，並理解全距大小的意義 能認識第 1、第 2、第 3 四分位數，及四分位數 (D-4-03)		
	11 12	數學期望值	11	理解離散機率變數期望值 (M1.d.3.1)
	11	信賴區間與信心水準的解讀	11	可性度、信心水準 (在「用詞與符號」提到) (M1.d.3.2)
	12	標準差	11	理解標準差的意義 (M1.d.3.1)
	12	相關係數(二元)		
	12	迴歸直線與最小平方法		
機率統計	9	能以具體情境介紹機率的觀念	6	能理解機率的意義 (d.6-B.1)
		能進行簡單的實驗以了解抽樣的不確定性、隨機性質等初步概念 (D-4-04)	8	機率與其基本性質 (d.8-B.1)
	11	樣本空間	11	理解母數與樣本的意義 (M1.d.3.2)
	11	事件	11	理解統計機率和數學機率的意義，並理解其關係 (事件在「用詞與符號」提到) (M1.d.2.1)
	11	機率性質		

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(2-2)

機率統計	11	亂數產生器(表)		
	12	常態分布	11	理解常態分布的意義 (M1.d.3.1)
	12	獨立事件	11	理解獨立事件，並應用 (M1.d.2.2)
	12	條件機率	11	理解條件機率的意義，並計算 (M1.d.2.2)
	12	貝式定理		
	12	二項分配	11	二項分布的意義，能求離散分布的平均與標準偏差 (M1.d.3.1)
	12	交叉分析(僅談兩個變數的情況，需與條件機率相結合)		
集合與邏輯	11	集合記號{列舉}{性質}	7	理解集合的意義 (n.7-A.1)
			10	理解集合的計算法 (n.10-A.1)
			7	凡氏圖 Venn Diagram (在「用詞與符號」提到) (n.7-A.1)
			10	理解命題的意義，辨識真與假 (n.10-A.2)
			10	理解逆命題 (n.10-A.2)
			10	否逆命題 (對偶命題) (n.10-A.2)
排列組合	11	排容原理		
	11	加法/乘法原理	11	能理解加、乘法，並利用在機會 (M1.d.1.1)
	11	排列	11	能理解排列的意義，並計算 (M1.d.1.2)
	11	組合	11	能理解組合的意義，並計算(不教學生重複組合) (M1.d.1.3)
	11	遞迴關係以 $a_n = \alpha a_{n-1} + f(n)$ 及 $a_n = \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2}$ 的形式為主，其中 $\alpha, \beta, \gamma$ 為常數， $f(n)$ 是次數小於 3 的多項式		
	11	二項式展開 (以組合的概念導出)	11	理解二項定理和巴斯卡三角形 (M1.d.1.4)

五、數學分析

台灣綱要			韓國綱要	
項目	年級	說明	年級	說明

無窮與極限	8	能理解等差數列的樣式、規則性及未知量 (N-4-04)	11	理解等差數列的意義，並計算首項到第 $n$ 項的和 (M1.a.3.1)
		導出等差級數公式能求等差級數有限和 (N-4-05)		
	10	數列一般式。數列的基本概念	11	理解等差、等比數列 (M1.a.3.1)
	10	$\Sigma$ 符號。級數的基本概念	11	理解 $\Sigma$ 的意義與性質，並運用 (M1.a.3.2)
	10	等比級數有限和	11	理解等比數列的意義，並計算首項到第 $n$ 項的和 (M1.a.3.1)
			11	理解無限數列的極限，並計算極限值。 理解無窮數列的收斂與發散，並判別。(M1.c.1.1)
	10	無窮等比級數極限	11	計算無限等比級數的和。利用無窮等比級數的極限值 (M1.c.1.1)
			11	了解無限數列的極限以及無限級數 (M1.c.1.1、M1.c.1.2)
	12	函數極限的定義。引入 $\Delta x$ 並以直觀說明極限的意義	12	理解函數極限的意義 (M2.c.1.1)
		11	理解無限級數的收斂與發散，並判別 (M1.c.1.2)	
微分學	12	引入 $\Delta y$ 及 $\Delta y/\Delta x$ 討論函數割線的斜率，並說明在運動學上的意義		
	12	以二次函數說明割線斜率的極限是切線的斜率		
	12	切線方程式	12	計算直線方程式 (M2.c.2.3)

五、數學分析(2-1)

微分學	12	導數的定義	12	理解導數的意義，並求其值(M2.c.2.1)
			12	能求 $y=x^n$ ( $n$ 為正整數)的導函數(M2.c.2.2)
	12	以二項式定理或分解因式求極限得出多項式的導函數，並介紹導函數常用的符號	12	求多項式函數的導函數(M2.c.2.2)
			12	合成函數的連鎖微分律( Calc.c.3.1)
			12	三角函數的導函數( Calc.c.3.1)
			12	指數函數和對數函數的導函數( Calc.c.3.1)
			12	隱函數和反函數的微分( Calc.c.3.1)
			12	參數表示的函數的微分( Calc.c.3.1)
	12	函數之漸增、漸減和臨界點	12	判定函數的漸增與漸減(M2.c.2.3)
			12	計算二次導函數( Calc.c.3.1)
	12	函數圖形的凹性、反曲點	12	反曲點( Calc.c.3.2)
	12	三次函數圖形(含對三次多項式實根個數的瞭解)	12	描繪函數圖形(M2.c.2.3)
	12	函數極值的一階、二階檢定	12	判斷多項函數的極大、極小(M2.c.2.3)
	12	極值的應用		
	12	導數在運動學上的意義	12	利用速度與加速度的解決問題(M2.c.2.3)
			12	理解微分均值定理，並運用( Calc.c.3.2)
12	牛頓法求根			
積分學	12	直觀說明黎曼和一再細分的分割所取得的極限是面積	12	理解區間積分法(M2.c.3.2)
	12	在等分割時，對 $y = x^2$ 求出黎曼和的極限		
	12	定積分的定義	12	理解定積分的意義(M2.c.3.2)
	12	反導函數的定義		
	12	求多項式函數圖形與直線 $x = a$ 、 $x = b$ 和 $y = 0$ 圍出的面積	12	理解區間積分法，並計算簡單圖形的面積與容量(M2.c.3.2)
	12	微積分基本定理	12	理解微積分基本定理(M2.c.3.2)
			12	計算 $y=x^n$ ( $n$ 為實數)的不定積分( Calc.c.4.1)
			12	計算三角函數的不定積分( Calc.c.4.1)

五、數學分析(2-2)

積分學			12	計算指數與對數函數的不定積分 (Calc.c.4.1)
			12	理解代換積分法，並運用 (Calc.c.4.1)
			12	理解分部積分法，並運用 (Calc.c.4.1)
	12	求圓面積	12	計算曲線為周長的圖形的面積 (M2.c.3.3)
	12	求球體和角錐體積	12	計算立體圖形的容積 (Calc.c.4.3)
	12	求自由落體運動方程式	12	運用有關速度與距離的問題 (Calc.c.4.3)

## 附錄六、台灣與日本之數學課程比較表

以下所呈現的是台灣數學綱要（包含九年一貫數學學習領域修訂綱要及 95 年高中數學暫行綱要）與日本數學課程之新學習指導要領對照分析表。在底下表格中，第七學年相當於日本中學第一學年，第八學年相當於日本中學第二學年，第九學年相當於日本中學第三學年。日本高中數學分基礎數學、數學 I、數學 II、數學 III、數學 A、數學 B、數學 C 七部分，其中基礎數學及數學 I、A 屬高一（相當於底下的 11 年級），數學 II、B 屬高二（相當於底下的 12 年級），數學 III、C 屬高三（相當於底下的 12 年級），其中數學基礎是在這次綱要中新設立的，目的是為了讓學生習得數學史並擁有數學的思考及見解，因此在學習指導要領中的內容較無牽涉到一般的數學課題，所以不列入比較之中，數學基礎與數學 I 為必修科目，其他均為選修科目。

日本中小學每學年的結構大致分為（一）目標（二）內容，第二學年後又增加（三）教學內容，其中內容部分『A』表數與計算；『B』表量與實測；『C』表圖形；『D』表數量關係。台灣在九年一貫中有給予能力指標，但在高中部分則沒有，為了方便比較，日本就以台灣為主列出類似的能力指標，其指標是根據內容部分採樹狀結構，由上而下排列，如「A-1-2」表示 A 部分的第 1 項中的第 2 小項，其後之（ ）是指在教學內容中宜特別注意的事項，其他的以此類推。而「用語・記號」是用來表示各學年教學內容的程度和範圍。

### 一、數與量

台灣			日本		
項目	年級	說明	年級	說明	
整數	正整數	1	100 以內的數 (N-1-01)	1	理解 100 以內的數字之表達方式和意義 (A-1-5)
		2	1000 以內的數 (N-1-01)	2	了解四位數以內的數字，同時能知道如何用十進位記數法表示數的大小和順序 (A-1-2)
		3	1000 以內的數 (N-1-01)	3	了解萬的單位 (A-1-1)
		4	億、兆 (N-1-01)	4	了解億、兆的單位，並整理十進位記數法的計算方法（在表示大的數字時，可以採用每三位數作區隔）(A-1)
		6 或 7	能理解因數、倍數、質因數、最大公因數和最小公倍數，並熟練質因數分解的方法 (N-3-01,N-3-02)		
		10	輾轉相除法		
		10	數學歸納法	11	數學歸納法（應注重其方法的理解）(B-1-2)

一、數與量(5-1)

整數	負數	7	能以正、負表徵生活中相對的量，並認識負數是性質（方向、盈虧）的相反（N-3-08）	7	關於正負數，要透過具體的現場活動加深學生的理解，並學會四則運算： (1)了解負數的必要性及正負數的意義 (2)理解正負數的四則運算，且能夠進行簡單的計算（A-1-1）
有理數	小數	3	認識一位小數，並學習一位小數（整數兩位）的加減直式計算（N-1-10）	4	了解如何用小數表示尾數部分，同時能了解小數的表現方式及 1/10 的位數（A-4-1） 了解 1/10 位數以內的小數之加減法計算，同時能夠進行演算（A-4-3）
		4	認識 2、3 位小數及其四則運算（N-2-10）	5	透過記數法加深對整數和小數的理解，並能有效地應用在計算上，同時也能寫出 10 倍、100 倍、1/10、1/100 等大小的數字，並探討它們之間的關係（A-2） 了解小數的乘法及除法的意義，並能適當地應用： (1)了解乘數和除數為整數時的乘法及除法的意義 (2)以乘數和除數為整數時的計算方法為基礎，了解乘數和除數為小數時的乘法及除法的意義 (3)思考小數的乘法及除法的計算方法，並懂得進行計算。同時也能了解餘數大小的意義（A-3） 把整數和小數改成分數或把分數改成小數的形式（A-4-2）
	分數	2	同分母加減運算（分母小於 12）（N-1-09）	5	更深入理解分數，了解同分母分數之加減法意義，並能適當地應用： (1)了解整數的除法（如果採用分數，通常都可以用一個數來表示） (2)思考同分母分數之加減法的計算方法，並懂得計算（要探討真分數與真分數的加減法）（A-4）
		4	假分數的整數倍計算，但不作帶分數的整數倍計算（N-2-07）		



一、數與量(5-2)

有理數	分數	4 或 5	等值分數、約分、擴分的意義 (N-2-08)	5	在一般狀況下，有大小相等的分數 (A-4-1)
	分數	5	異分母的比較與加減 (N-2-09)	6	<p>加深對分數的理解，了解異分母分數的加減法意義，同時能適當地加以利用：</p> <p>(1)了解分數的分子及分母乘除同一數字時，所得的分數與原先的分數大小相同</p> <p>(2)思考分數的相等及大小，並整理大小的比較方法</p> <p>(3)思考並學會異分母分數的加減法計算（要探討真分數與真分數的加減法）(A-2)</p>
	比例	6	比、比值、正比、反比 (N-3-05)	7	<p>了解比例、反比例的意義 (C-1)</p> <p>將比例、反比例用表、公式或圖表來表示，並理解其特徵 (C-3)</p> <p>能夠運用比例、反比例的看法和想法 (C-4)</p>
	絕對值	7	理解絕對值在數線上的意義 (N-3-10)	7	絕對值記號（放在『用語』內）(A)
量與實測	長度、容量、重量	1	能認識長度，並作直接比較(N-1-14)	1	<p>透過對物品長度的比較，理解量和量的基本測量</p> <p>(1)長度的直接比較</p> <p>(2)利用身邊的物品作為長度的單位，並計算有幾倍來比較長度 (B-1)</p>
		1	利用間接比較或個別單位來比較長短 (N-1-15)		
		2	能認識容量、重量，並作直接比較 (N-1-14)		
		2	能說明用不同個別單位測量相同長度，其數值不同 (N-1-15)	2	了解長度的單位與測量的意義 (B-1-1)

一、數與量(5-3)

量與實測	長度、容量、重量		3	了解長度、體積和重量能在簡單的場合中進行測量 (1)了解長度的單位(公里 km) (2)了解體積、重量的單位和測量的意義 (3)了解體積的單位(公升 l) (4)了解重量的單位(公克 g)(要學會公撮(ml)、公合(dl)及公斤(kg)等單位)(B-1)		
		5	容量、容積和體積的關係(N-2-18)			
	角度	3	能認識角，並比較大小(N-1-14, N-1-15)	4	了解角的大小，並能夠進行測量： (1)了解角的旋轉程度就是角的大小及角的單位和測量意義 (2)了解角的單位(度)(B-2)	
		4	會用量角器實測角度或畫出指定的角(如：30度、45度、60度、90度、120度、135度、150度)(N-1-16)			
	面積、體積、周長	2	能認識面積，並作直接比較(N-1-14)	4	了解面積的意義，並學會在簡單的情況下懂得面積的計算： (1)了解面積的單位與測量的意義 (2)了解面積的單位(平方公分) (3)思考正方形和長方形面積的求法，並懂得如何利用(B-1)	
		3	能利用間接比較或個別單位實測的方法比較不同面積的大小，並認識面積單位「平方公分」(N-1-15)			
		4	能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並作相關計算(N-2-15)			
		5	能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並作相關計算(N-2-15, N-2-16)			
		4	能理解長方形和正方形的面積與周長公式(N-2-17)			
		4	能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較不同體積的大小，並認識體積單位「立方公分」(N-1-15, N-1-16)			6
5		能理解體積單位「立方公尺」，及「立方公分」、「立方公尺」間的關係，並作相關計算(N-2-15, N-2-16)				
5	能理解三角形、平行四邊形和梯形的面積公式(N-2-19)	5	思考三角形及平行四邊形面積的求法，並懂得計算(B-1-1)			

一、數與量(5-4)

量與實測	體積	5	能理解長方體和正方體的體積公式 (N-2-17)	6	思考立方體及正方體體積的求法，並能加以應用 (B-2-3)
		6	能理解簡單柱體的體積 (N-3-17)	7	會求基本的柱體、錐體表面積與體積(可以提及三角形或圓等圖形為底面的柱體及錐體) (B-2-3)
		8	能計算柱體表面積的問題 (S-4-04)		
	時間	1	能報讀整點、半點的時刻 (N-1-13)	2	在日常生活中能夠正確地讀出時間 (B-2)
		2	能報讀幾點幾分 (N-1-13)		
		3	認識日、時、分、秒的關係，並能作同單位時間量的加減計算 (N-1-13)	3	了解時間： (1)了解日、時、分和秒，同時也能了解它們之間的關係 (2)能在簡單場合中懂得必要的時刻和時間 (B-3)
		4	能解決複名數的時間量計算，以及時刻與時間量的加減問題 (N-2-15)		
	圓面積、圓周長	6	可由圓周長的實測理解圓周長與直徑成比例。能理解圓面積公式，並能計算簡單扇形面積 (N-3-16)	4	了解圓心、直徑和半徑 (C-1-3)
				5	思考圓面積的求法，並懂得計算(計算圓周率時雖然用 3.14，但依目的也可考慮用 3 來計算) (B-1-2) 理解圓周率的意義 (C-1-4)
				7	會求扇形的弧長與面積 (B-2-3)
估算	2	認識公分、公尺，並能作相關的實測、估測與計算 (N-1-16, N-1-17)	2	了解長度的單位(公厘(mm)、公分(cm)、公尺(m)) (B-1-2)	
	3	認識長度單位(毫米、公分、公尺)、容量單位(公升、毫升)、重量單位(公斤、公克)，並能作相關的實測、估測與計算 (N-1-17)	3	針對長度等作大概的估測，並懂得依照目的適當選擇單位和測量工具進行測量 (B-2)	
	4	能用四捨五入法取概數，並作加、減之估算 (N-2-05)	4	了解概數的意義，並懂得依照目的的需要去利用它 (1)明瞭何種場合可以利用概數。 (2)了解四捨五入 (A-2)	
	5	能用四捨五入法對小數在指定位數取概數，並作估算 (N-2-05)	5	加深對概數的理解。依照目的能用概數估算和與差 (A-5)	
	6	使用方格紙估算曲線所圍區域面積 (N-3-15)	6	能夠掌握身邊的圖形的概念，並能求出大概的面積 (B-1)	
	8	能求二次根的近似值 (N-4-01)			

一、數與量(5-5)

數系	10	無理數(含 $\pi$ )	10	無理數的計算(不含兩層開根號,如 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ )(I-1-1)
	10	平方根之四則運算及有理化分子/分母		
	10	實數	10	實數(I-1-1)
	10	虛數,介紹 $i$ 的由來	11	虛數(放在『用語』內)(II-1)
	10	複數四則運算	11	複數(II-1-2)

二、代數(含樣式、關係、函數與坐標圖)

台灣			日本	
項目	年級	說明	年級	說明
能以數學符號表示數學式子	2	能將具體情境中單步驟的加減問題列成算式填充題,並解釋式子與原問題情境的關係(A-1-02)	1	了解何時要利用加法或減法,並懂得利用式子表現且能把它唸出來(A-2-1)
	3	能將具體情境中單步驟的乘、除問題列成算式填充題,並解釋式子與原問題情境的關係(A-1-02)	2	明瞭何時要利用乘法,並用式子表達且能唸出公式(A-3-1)
			3	了解何時要利用除法,並能用式子表現且能把它唸出來(A-4-1)
	4	能用中文簡計式表示長方形和正方形的面積公式與周長公式(A-2-05)		
	5	能用中文簡計式表示長方體和正方體的體積公式(A-2-05)		
	4	能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式,並能解釋式子與原問題情境的關係(A-2-04)	7	培養學生能夠利用文字和公式來表示關係及法則,並看懂公式的意義,同時能夠計算以文字書寫的公式: (1)了解利用文字的意義 (2)了解以文字書寫的公式中,其乘法與除法的表現方式 (3)能計算簡單一次方程式的加減法(對於公式值的計算,只須學習以一個文字代入即可)(A-2)
5	能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題,並嘗試解題及驗算其解(A-2-04)			

## 二、代數(11-1)

能以數學符號表示數學式子	6	能使用 $x, y, \dots$ 等未知數符號，將具體情境中問題列成兩步驟的算式題，並嘗試解題及驗算其解 (A-3-03)	8	<p>能找出事物中數量的關係，培養學生將這些關係用文字寫成公式，並且會用文字書寫的公式進行四則的運算：</p> <p>(1)會計算簡單整數的加減法及單項式的乘除法</p> <p>(2)讓學生理解文字公式的運用及數量與數量間的關係</p> <p>(3)依照目的懂得利用簡單的公式改變算式 (A-1)</p>
數學式與方程式的操作	1	能在具體情境中，認識加法的交換律、結合律，並運用於簡化計算 (A-1-03)		
	2	能在具體情境中，認識乘法的交換律，並運用於簡化計算 (A-1-03)	2	<p>(1)利用乘法形成的簡單特性來構成九九乘法，並利用它來計算</p> <p>(2)了解九九乘法，並確實學會一位數和一位數的乘法 (可以計算乘數一個一個增加時的乘積總和及交換律) (A-3)</p>

二、代數(11-2)

數學式與方程式的操作	1	能在具體情境中，認識加減互逆 (A-1-04)	1 或 3	理解加減法的意義，並懂得如何應用： (1)能思考個位數和個位數加減法的計算方式，並能夠正確地演算
	2	能理解加減互逆，並運用於驗算與解題 (A-1-04)		<p>加深對加減法的了解，並加強演算能力： (1)理解加減法間的相互關係 (2)思考二位數的加減法之計算方法，了解這些計算方法是以一位數的基本計算為基礎，並確實學會演算二位數的加減法，同時也能了解二位數的筆算方法(必要時可以使用( )和□，並探討交換律法和結合律法、加法與減法之間的相互關係)</p> <p>確實懂得加減法的計算，並增強適當的應用能力： (1)思考三位數的加減法之計算方法，了解三位數的計算是以二位數的基本計算為基礎。同時也能學會三位數的筆算方法 (2)確實懂得加減法的計算，並能夠適當地加以應用 (3)探討加減法可以成立的特質，思考其計算方法，並試作其運算方法 (要讓學生能夠用心算作簡單的計算，同時也要把心算有效地利用在筆算和估測上面，並學會交換律和結合律及加減法的相互關係) (A-2)</p>

二、代數(11-3)

數學式與方程式的操作	3	能在具體情境中，認識乘除互逆 (A-1-05)	3 或 4	<p>加強對乘法的理解，並學會確實地計算，以發展其適當的應用能力：</p> <p>(1)思考二位數和三位數乘一位數，及二位數乘二位數的計算方法，了解這些計算是以九九乘法的基本計算為基礎，同時也要能了解其筆算方法</p> <p>(2)確實懂得乘法的計算，並能夠適當地應用</p> <p>(3)探討乘法能夠形成的性質，思考其計算方法，並利用在試算上面（要探討乘數與被乘數為0時的計算法）(A-3)</p>
	4	能理解乘除互逆，並運用於驗算與解題 (A-2-02)		<p>能理解除法的意義，並懂得使用：</p> <p>(1)了解餘數的意義</p> <p>(2)了解除法、乘法和減法之間的關係</p> <p>(3)確實學會除數和商都是一位數的除法計算（學會交換律、結合律及分配律）(A-4)</p>
	4	能在具體情境中，理解乘法結合律、先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積 (A-2-01)		<p>加深對整數除法的理解，並能夠正確地演算，以增強其適當利用的能力：</p> <p>(1)思考除數為一位數和二位數，被除數為二位數和三位數的計算方法，了解其計算是以基本計算為基礎演算出來，同時也能學會其筆算方法</p> <p>(2)確實懂得除法的計算，並能夠適當地應用它</p> <p>(3)探討除法的被除數、商和餘數之間的相互關係，並整理成如下的式子：  <math>(\text{被除數}) = (\text{除數}) \times (\text{商}) + (\text{餘數})</math></p> <p>(4)探討除法形成的性質，思考其計算方法，並能夠確切地利用演算（要讓學生能用心算作簡單的計算並探討除數和被除數同乘一數，或同除一不為0的數，商都是不變的特性）(A-4)</p>
	5	能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算 (A-2-03)		
	6	能理解等量公理 (A-3-02)		

二、代數(11-4)

數量間的變化與關係			4	思考在簡單的場合，會對應的數量，把數值列組整理成圖表，並探討其關係。(D-1-1)	
			5	了解簡單的二個數量的對應與變化之間的關係，了解對數量關係的意義和調查方法。(D-4)	
			5	理解百分率的意義，並能應用在計算上。(要簡單涉獵比率的意義。)(D-2)	
	6	能在比例的情境或幾何公式中，透過列表的方式認識變數 (A-3-07)			了解簡單的場合中，比所代表的意義 (D-1)
			6	加強對共同產生變化的二數量的觀察能力。了解比例的意義，並在簡單的場合中，能應用圖表和統計圖表去探討其特徵 (透過具體地狀況調查數量的關係，了解有相同數值的比的存在。但不要探討比的數值) (D-2)	
			7	透過具體事物的現象中找出兩個數量的變化及對應，並找出比例、反比例的關係： (1)了解比例、反比例的意義 (2)以表、公式或圖表來表示比例及反比例，並理解其特徵 (4)能夠運用比例、反比例的看法和想法 (C-1)	
	7	能嘗試以代入法或列舉法求一次方程式的解，並檢驗解的合理性  能熟練符號的代數操作  能認識變數與函數  能舉出例子，說明一次函數是一種特殊的比例對應關係 (A-3-07)			從具體的事物中取出兩個數量，並透過這些數量的變化和對應了解一次函數，並找出函數關係，以培養表現與考察的能力： (1)了解可以用一次函數來加以掌握的事例 (2)了解一次函數值變化之比例與圖表的特徵，並能夠運用一次函數 (C-1)
8					



二、代數(11-5)

坐標	7	<p>能運用直角坐標系來標定位置</p> <p>能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形</p> <p>能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形</p> <p>能在直角坐標平面上認識解二元一次聯立方程式的解 (A-3-11,A-3-12)</p>	7	了解坐標的意義 (C-1-2)
一元一次方程式與不等式	7	<p>能由具體情境中列出一元一次方程式，並理解其解的意義</p> <p>能以等量公理來解一元一次方程式，並做驗算</p> <p>能以移項法則來解一元一次方程式，並做驗算 (A-3-08)</p>	7	<p>了解方程式，並且會運用一元一次方程式</p> <p>(1)了解方程式及其中文字的意義</p> <p>(2)找出等式的性質，並了解方程式是以此為依據才能求解</p> <p>(3)能夠計算簡單的一元一次方程式，並且會運用 (A-3)</p>
	7	<p>能由具體情境中列出一元一次不等式</p> <p>能利用移項法則在數線上找出一元一次不等式的解</p> <p>能由具體情境中描述一元一次式解的意義 (A-3-09)</p>		
二元一次方程式	7	能由具體情境中列出二元一次方程式，並理解其解的意義 (A-3-10)	8	<p>了解二元一次聯立方程式，並且能善加運用：</p> <p>(1)了解二元一次方程式及其解的意義</p> <p>(2)了解二元一次聯立方程式及其解的意義，會解簡單的二元一次聯立方程式並懂得運用 (不必說明 <math>A=B=C</math> 的形式之二元一次聯立方程式) (A-2)</p>

二、代數(11-6)

二元一次方程式	7	能由具體情境中列出二元一次聯立方程式，並理解其解的意義 能在直角坐標平面上認識解二元一次聯立方程式的解 能熟練使用消去法解二元一次聯立方程式 (A-3-13)	8	能看懂二元一次方程式用函數來表示的公式 (C-1-3)
一元二次方程式	8	能由具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義 能利用一元二次方程式解應用問題 (A-4-05)	9	了解二次方程式，並且會加以運用，同時也能了解二次方程式的必要性及其解的意義 (A-3-1)
因式分解	8	能理解因式、倍式、公因式與因式分解的意義  能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解  能利用提出公因式與分組分解法分解二次多項式 (A-4-04)	6	加深對整數性質及因數、倍數的理解 (不要偏重在最大公因數及最小公倍數的形式求法，要著重於具體情況的探討)
			9	關於用文字表示的簡單多項式，要懂得展開公式和進行因式分解，並且能夠依照目的變換公式 (1)會計算單項式與多項式的乘法及多項式除以單項式的除法 (2)會計算簡單的一次式乘法，並且會運用下列公式展開簡單的公式和因數分解 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (可說明將自然數分解成質因數，且僅須提及公式的運用，不必說明將多項式換成文字的因式分解) (A-2)
			9	會計算簡單的二次方程式，並且會加以運用 (對於 a,b 為有理數且有實數解的二次方程式及 p,q 為實數且有實數解的二次方程式，可以提及利用內容「A、數與公式」的 2 之(2)所列的公式進行因式分解。無法用因式分解求解的二次方程式，可以舉出 x 的係數為偶數的簡單例子，僅限於了解改變成平方形式求解的方法即可，不必提及解的公式) (A-3-2)

二、代數(11-7)

函數圖形	一次函數圖形	7	能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形 (A-3-11)	9	從具體事物現象中取出兩個數量，透過這些數量的變化和對應理解函數，並且找出函數關係以發揮表現與觀察的能力： (1)了解可以用函數來加以掌握的事物現象 (2)了解函數的圖表特徵與函數值的變化的比例 (C-1)
	二次函數圖形	9	能理解二次函數的樣式並繪出其圖形 能利用配方法繪出二次函數的圖形 能計算二次函數的最大值與最小值 能應用二次函數最大值與最小值的簡單性質 (A-4-06)		
			9	能理解二次函數的圖形與拋物線的概念 能理解拋物線的線對稱性質 (A-4-07)	
基本函數		10	直線的點斜式 (斜率)		
		10	多項式函數 (含一次及二次圖形)	10	二次函數曲線圖 (I-2-1)
		10	指數函數及其圖形 (含查表及可用電算器)	11	指數擴張到實數及指數函數 (II-3-2)
		10	對數函數及其圖形 (含查表、內插法及可用電算器)	11	對數函數 (不講對數的計算) (II-3-2)
		10	三角函數值 (範圍限於 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之間)	10	三角比 (正弦、餘弦、正切及其相互關係, 範圍僅限於 $0^\circ \sim 180^\circ$ 之間) (II-3-1)
		10	特殊角的三角函數值 (處理 $30^\circ$ 或 $45^\circ$ 的直角三角形邊角性質)		
		10	廣義角與弧度量 (radian)	11	角的擴張與弧度法 (II-3-1)
		10	三角函數 (廣義角、sin、cos、tan)	11	三角函數及其基本性質 (II-3-1)
		10	三角函數之測量 (含三角函數值表且可用電算器)	10	圖形的測量 (運用海龍公式求三角形面積時不宜太深入) (I-3-2)

二、代數(11-9)

基本函數	10	三角函數之關係(含和角、倍角、半角、平方和、餘角、補角)	11	三角函數的加法定理(僅限於二倍角公式及 $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ 的程度)(II-3-1)
	10	三角函數定理(含正弦、餘弦定理)	10	正弦及餘弦定理(僅限於 $0^\circ \sim 180^\circ$ 之間)(I-3-2)
多項式	10	多項式的四則運算(含乘法、長除法及綜合除法)	11	整式的除法及分數式(對於分數式僅限於分母為二次式)(II-1-1)
	10	餘式與因式定理(含整係數多項式的一次因式檢驗法)	11	因式定理(放在『用語』內)(II-1)
	10	因式分解	10	式的展開及因式分解(I-1-1)
	10	公因式、公倍式(含輾轉相除法求最高公因式)		
	10	多項式方程式(含代數基本定理、共軛複根及勘根定理)	10或11	複數及高次方程式(僅限於係數較簡單的二次及三次方程式其中複數是在II方有提到)(I-1-3,II-1-2)
			11	二次函數的最大、最小值(I-2-2)
函數性質與運算	10	合成函數(平移)	12	合成函數(III-1-2)
	10	反函數	12	反函數(III-1-2)
線性代數	11	線性聯立方程式	12	一次聯立方程式(C-1-2)
			12	點的映射(僅限於平面上)(C-1-2)
	11及12	解的算法(增廣矩陣、克拉瑪公式、高斯消去法)	12	矩陣的商,即解 $Ax=b$ (僅限於 $3\times 3$ 的範圍)(C-1-1)
	12	行列式(限二階、三階)		
	12	行列式性質(列運算、cofactor降階)		
	12	行列式與面積/體積		
	12	矩陣表達式		
	12	反矩陣	12	反矩陣(僅限於 $2\times 2$ 的範圍)(C-1-1)
	12	矩陣的加法與係數積	12	矩陣的和、差及實數倍(僅限於 $3\times 3$ 的範圍)(C-1-1)
	12	矩陣的乘法運算		
12	矩陣的列運算			

二、代數(11-10)

二次曲線與曲面	9	理解兩圓的位置關係 (S-4-14)	10	圓的性質 (僅以四角形內接圓的條件及方法處理二個圓的位置關係) (A-1-1)
	11	圓方程式	11	圓方程式 (II-2-2)
	11	拋物線方程式 (標準式)	12	拋物線 (僅限於標準型及平行移動的範圍, 不教曲線的旋轉) (C-2-1)
	11	雙曲線方程式 (標準式, 含漸近線)	12	雙曲線 (僅限於標準型及平行移動的範圍, 不教曲線的旋轉) (C-2-1)
	11	圓錐曲線數學性質	12	焦點、準線 (放在『用語』內) (C-2-1)
	11	圓錐曲線光學性質	12	曲線的參數表示法 (C-2-2)
	11	球面方程式		
	11	圓與直線之關係 (切、割)	11	圓與直線 (僅限於求圓與直線的交點) (II-2-2)
	11	球與平面關係		
不等式	12	絕對不等式 (證明不等式, 含算幾不等式、柯西不等式、應用實例)	11	等式及不等式的證明 (II-1-1)
	12	條件不等式 (解不等式, 含一元多項式不等式、絕對值不等式之解區間)	10	一次不等式 (只採用實數解) (I-1-2)
			10	二次不等式 (I-2-2)
	11		11	在簡單情況下講解軌跡與不等式所表示的區域 (II-2-1)
12	二元線性規劃問題			
坐標與向量	10	複數與直角坐標		
	10	複數之極式 (含棣美弗定理及 1 的 n 次方根)		
	10	極坐標	12	極坐標與極方程式 (C-2-2)
	11	向量運算	11	向量及其運算 (B-2-1)
	11	向量內積	11	向量的內積 (B-2-1)
	11	向量應用於平面幾何 (含三角形兩邊中點連線定理、平行四邊形定理)		
	11	直線參數式	11	點坐標與直線方程式 (II-2-1)
	11	點線距離		
	11	內積的應用 (含柯西不等式、正射影、兩直線的夾角)		
11	直角坐標	11	空間坐標 (講述空間圖形的方程式僅限於 $z = k$ 的程度) (B-2-2)	

二、代數(11-11)

坐標與向	11	平面法向量	11	空間中的向量 (不需講述空間中的向量值方程式) (B-2-2)
	11	直線與平面方程式		
	11	平面夾角		

量	11	點面距離		
	11	兩線距離（含平行線的距離、歪斜線的公垂線段長）		

### 三、圖形與幾何

		台灣	日本	
項目	年級	說明	年級	說明
辨識、描述與定義幾何形體	1	能辨認、分類簡單平面圖形與立體形體 (S-1-01)	1	透過對身邊立體實物的觀察和構造等活動，讓學生對圖形有更豐富的基本概念 (1)能夠認識物品的形狀，並掌握形狀的特徵 (2)能夠正確使用前後、左右、上下等方向與位置的用辭，表達物品的位置 (C-1)
	1	能描述某物在觀察者的前後、左右、上下及兩個物體的遠近位置 (S-1-06)		
	4	能運用角、邊等構成要素，辨認簡單平面圖形 (S-2-01)	3	透過觀察與製作箱子形狀的物品，了解構成圖形的要素 (C-1-1)
	4	能透過操作，認識基本三角形與四邊形的性質 (S-2-03)	2	透過對物的形狀觀察和製作等活動，進一步充實理解圖形基礎的經驗： (1)製作並分解各種圖形 (2)了解三角形和四角形，並把它畫出來或製作出來 (C-1)
			3	觀察構成圖形的要素，了解正方形、長方形與直角三角形，並畫圖、製作，或把它展開在平面上 (C-1-2)
	5	能透過操作，理解三角形內角和為 180 度，任兩邊和大於第三邊 (S-2-03)	5	了解平行四邊形、梯形、菱形、學會圖與製作，並在平面上予以展開 (C-1-2)

三、圖形與幾何(3-1)

辨識、描述與定義幾何形體	5	能判斷一圖形是否滿足線對稱，並找出該圖形的對稱軸（可能不止一條）  理解哪些常見平面圖形具有線對稱的性質  知道線對稱圖形的對應邊相等、對應角相等，並知道對稱軸兩側圖形全等  知道如何描繪一簡單平面圖形的線對稱圖形（S-2-06）	7	了解線對稱與點對稱的意義，以對稱性為重點加深對平面圖形直覺的看法與想法（B-1-1）
	6	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題（例如由三角形的內角和推知四邊形的內角和）（S-3-01）	5	懂得利用基本圖形的簡單概念來探討圖形，並加以繪製（探討三角形等多角形的角度之和）（C-1-3）
			8	能確認三角形或平行四邊形的性質（提及正方形、菱形、長方形時，僅限於了解這是平行四邊形的特別形式即可）（B-2-2）
	6	能認識正圓錐、正圓柱與正角柱(S-3-05)	6	透過觀察和製作圖形等活動，加深對立體圖形的理解，並注意觀察圖形的構成要素和位置關係：(1)了解立方體及正方體（能畫出簡單適當的簡圖和展開圖）(2)了解與立方體、正方體有關連的直線和平行的平面與垂直的關係(3)了解三角柱、四角柱等角柱以及圓柱（不要去探討展開圖、立面圖及平面圖）（C-1）
	8	能理解長方體、正方體、正角錐、正角柱、圓錐、圓柱等立體的基本展開圖（S-4-01）		
	8	能辨別柱體的展開圖（S-4-04）		
	8	能明確定義幾何圖形（三角形、四邊形、多邊形及圓形）及幾何圖形的點、線、角（S-4-01）		
	8	能以最少性質辨認三角形，並能理解特殊三角形（如正三角形、等腰三角形）的定義及性質（S-4-08）	4	觀察構成圖形的要素，了解等腰三角形、正三角形的特性，並進行畫圖、製作，和在平面上展開等活動（C-1-1）

### 三、圖形與幾何(3-2)

全 等	4	能以對應頂點、對應角、對應邊的關係來描述全等的意義 (S-2-04)		
	8	能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義，並能理解三角形的全等性質 (SSS、SAS、ASA、AAS 及 RHS 全等性質) (S-4-08)	8	根據三角形的全等性質確認平面圖形的性質，培養理論的考察能力 (1)了解證明的意義與方法 (2)了解三角形的全等性質 (3)透過觀察和實驗圓周角與圓心角的關係，並能夠將這些用理論來確認 (不必涉及圓周角的逆定理) (B-2)
尺 規 作 圖	8	能認識尺規作圖，並能熟練基本尺規作圖 (例如:平分線段、角平分線、垂直線、中垂線、平行線)  能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義 (S-4-07)	7	了解角平分線、線段的垂直平分線、垂線等基本繪圖方法，並能夠加以運用 (可以提示圓的切線與通過該點的半徑垂直) (B-1-2)
	8	能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義，並能理解三角形的全等性質 (SSS、SAS、ASA、AAS 及 RHS 全等性質) (S-4-08)		
相 似	6	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響 (S-3-02)		
	9	能對簡單的相似多邊形指出對應邊成比例、對應角相等性質 (S-4-12)  能理解三角形的相似性質  平行線截比例線段性質  利用相似三角形對應邊成比例的觀念，應用在實際物的測量 (S-4-13)	9	根據三角形的相似性質以確認圖形性質： (1)了解相似圖形的意義，同時能夠運用三角形的相似性質以確認圖形的性質 (2)找出平行線與線段比之性質，並懂得加以確認 (3)懂得運用相似的概念 (B-1)



### 三、圖形與幾何(3-3)

幾何證明	8	能理解勾股定理 能由簡單的面積計算導出勾股定理 能理解勾股定理的應用 (S-4-05)		
	8	能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同 (S-4-10)		
	9	能根據平行線截線性質作推理 (S-4-11,S-4-15)		
	9	能理解三角形外心、內心和重心的定義和相關性質 以三角形和圓的性質為題材來學習推理 (S-4-15)	10	三角形的性質 (僅理解重心、內心及外心等簡單性質) (A-1-1)

### 四、集合、邏輯、排列組合與機率統計

台灣			日本	
項目	年級	說明	年級	說明
收集與整理資料	1	能對生活中的事件或活動做初步的分類與紀錄 能將紀錄以統計表呈現並說明 (D-1-01)	2	把簡單的事情加以分類整理，並用數字來表達，或用統計圖表來表示 (A-1-5)
	3	能報讀生活中常見的直接對應 (一維) 表格 (D-1-02)		
	4	能報讀生活中資料的統計圖，如長條圖、折線圖與圓形圖等 (D-2-01)		
	4	能報讀較複雜的長條圖 (D-2-02)		
			3	了解柱狀統計圖表的讀法和繪製方法。(D-1-2)

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(2-1)

收集與整理資料	5	能整理生活中的資料，並繪製成折線圖 (D-2-03)	4	了解兩數同時變化的關係。除進行調查外，並把它表示出來： (1)思考在簡單的場合中會對應的數量，把數值列組整理成圖表，並探討其關係 (2)用折線圖表示變化的情形，並從這個圖表讀出變化的情形 (D-1)
			4	能夠依照目的蒐集資料，分類整理，並調查其特徵： (1)探討二件事物會同時產生關聯的情況 (2)探討資料有否遺漏和重疊的現象 (3)用折線統計圖表來表現資料，並由統計圖表探討資料的特徵和趨勢 (D-3)
	5	能整理有序資料，並製成長條圖與圓形圖 (D-2-04)	5	能依照目的作資料的分類整理，並能用圓形圖、長條圖表示出來 (D-3)
	9	能將原始資料整理成次數分配表，並製作統計圖形，來顯示資料蘊含的意義 (D-4-01)		
	11	抽樣方法		
二維資料呈現	3	能報讀生活中常見的交叉對應 (二維) 表格 (D-1-03)		
	5	能報讀生活中有序資料的統計圖 (D-1-04)		
	12	散佈圖 (二元)		
基本統計量	9	能認識平均數、中位數與眾數均可以某種程度地表示整筆資料集中的位置 能認識平均數、中位數與眾數在不同狀況下，被使用的需求度有些微的差異 (D-4-02)	6	了解平均數的意義並能應用理解 (D-3)
	9	能認識全距，並理解全距大小的意義 能認識第 1、2、3 四分位數，及四分位數 (D-4-03)		

四、集合、邏輯、排列組合與機率統計(2-2)

基本統計量	11 或 12	期望值	10	期望值 (A-3-3)
	12	相關係數 (二元)	11	資料的分析 (平均值、離差、標準差及相關分析) (B-3-2)
	12	迴歸直線		
	11	信賴區間及信心水準的解讀		
	11	標準差		
機率與統計	9	能以具體情境介紹機率的概 能進行簡單的實驗以了解抽樣的不確定性、隨機性質等初步概念 (D-4-04)		
	11	樣本空間	12	母群體與樣本 (C-4-2)
	11	事件	10	餘事件及互斥事件 (A-3)
			12	機率變數與其分佈 (C-3-2)
	11	機率性質	10	機率及其基本法則 (A-3-2)
	11	亂數產生器 (表)		
			11	頻率分佈表及相關圖 (B-3-1)
	11	常態分佈	12	連續型的機率變數與常態分佈 (C-4-1)
	12	獨立事件	10	獨立實驗與機率 (不處理事件的獨立與相依) (A-3-2)
	12	條件機率	12	條件機率 (C-3-1)
	12	貝式定理		
	12	二項分配	12	二項分配 (C-3-2)
	12	交叉分析		
集合與邏輯	11	集合元素的計數		
			10	命題 (含對偶命題並處理必要條件及充分條件) (A-2-2)
			10	歸謬證法 (A-2-2)
			10	理解集合的包含關係及凡氏圖 (Venn Diagram) (A-2-2)
	11	排容原理		
	11	加法/乘法原理		
	11	階乘與排列	10	階乘與排列 (A-3-1)
集合與邏輯	11	遞迴關係式, 以 $a_n = \alpha a_{n-1} + f(n)$ 及 $a_n = \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2}$ 的形式為主, 其中 $\alpha, \beta, \gamma$ 為常數, $f(n)$ 是次數小於 3 的多項式		
	11	組合	10	組合 (A-3-1)
	11	組合之應用 (二項式定理)	10	二項式定理 (A-3-1)

五、數學分析

項目	台灣		日本	
	年級	說明	年級	說明
數列與級數	10	數列一般式（數列的基本概念）	11	數列一般式（僅限於兩項間的關係式）（B-1-2）
	10	$\Sigma$ 符號（級數的基本概念）	11	$\Sigma$ 符號（放在『用語』內）（B-1）
	10	等差級數與等比級數（含數列）	11	等差數列、等比數列與其他各種數列（其他數列只限於講述等差數列或數列 $\{n^2\}$ 的和）（B-1-1）
			12	數列 $\{r^n\}$ 的極限（Ⅲ-1-1）
	10	無窮等比級數與循環小數（含極限的概念）	12	無限等比級數的和（Ⅲ-1-1）
微分學	12	函數極限的定義（引入 $\Delta x$ 並以直關說明極限的意義）	12	函數值的極限（Ⅲ-1-2）
	12	割線方程式		
	12	切線方程式（含切線斜率）	11 或 12	切線（Ⅱ-4-1,Ⅲ-2-2）
	12	導數的定義		
	12	導函數的定義	11	導函數（僅限於 3 次為止的函數）（Ⅱ-4-1）
	12	多項式函數之導函數	12	函數的和、差、積、商及合成函數的導函數（分數函數的導函數，分母及分子僅限於二次程度而合成函數為 $y=x^k$ （ $k$ 是有理數），處理像 $y=\sqrt{ax+b}$ 及 $y=\sqrt{ax^2+b}$ 程度的簡單函數。）（Ⅲ-2-1）
			12	三角函數之導函數（Ⅲ-2-1）

五、數學分析(1-1)

微分學			12	指數與對數函數之導函數（含自然對數）（Ⅲ-2-1）
	12	函數之漸增、漸減、臨界點	11 或 12	函數值的遞減（Ⅱ-4-1,Ⅲ-2-2）
			12	二次導函數(放在『用語』內)（Ⅲ-2-2）
	12	函數圖形之凹性、反曲點	12	反曲點（放在『用語』內）（Ⅲ-2-2）
	12	相對極值與二階檢定		
	12	求極值的應用問題		
	12	導數在運動學上的意義	12	速度、加速度（Ⅲ-2-2）
			12	均值定理(僅限於直覺地使其理解的程度)（Ⅲ-2）
	12	牛頓法求根（求整數開平方根的近似值）		
積分學	12	反導函數的定義	11 或 12	不定積分（Ⅱ-4-2,Ⅲ-3-1）
	12	微積分基本定理	12	
	12	定積分的定義	11	定積分（限二次為主的函數）（Ⅱ-4-2）
	12	定積分與面積的關係	11	定積分與面積（限二次為主的函數）（Ⅱ-4-2）
	12	直觀說明黎曼和一再細分的分割所取得的極值是面積		
	12	定積分及其應用（以求圓面積、球體體積、角錐體積、自由落體運動方程式為主）	12	積分的應用（面積、體積）（Ⅲ-3-2）
	12	多項式的反導函數		
	12	切片積分與體積		
			12	置換積分法（僅限於跟 $ax+b=t$ , $x=asin\theta$ 置換的程度）（Ⅲ-3-1）
數值計算與演算法			12	簡單程式（僅限於 Euclid 的互除法）（C-4-1）
			12	整數及近似值的計算(限於二分法及運用梯形公式算面積的近似值)（C-4-2）

## 附錄七、跨國課時對照表

為了比較各國數學課程的授課時數，免不了牽涉到比數學教育更高層的整體教育政策或體制。這些情況的整體介紹，請看內容的各國比較報告。此處僅以簡短的附註形式標明。

簡表內本來要紀錄每週上課節數，但是後來因為各國每節授課時間不盡相同，有些資料顯示之學年總節數不被上課週數整除，有可能上課並非整數週，也可能並非每週上課同樣節數，故改以總時數和比例來製表，或許這是更有意義的資料。

為了公平地比較，本報告原本計畫完全根據官方公告的標準而統計。而實際上，因為在新加坡實在找不到官方標準，只好改以某些公立學校的實際課表來統計。其他國家（包括台灣本身）則都是以政府公告的標準來統計。美國是個很大的國家，其教育體制與內容皆不統一。所以，請注意，在此報告中以加州公立學校代表所謂的「美國」。

		中國 <sup>a</sup>	日本	南韓 <sup>g</sup>	新加坡	美國 <sup>k</sup>	台灣 <sup>m</sup>
1	比例	16%	15%	16%	14% <sup>h</sup>	22%	13% <sup>n</sup>
	總時	123	86	80	140	180	80 <sup>p</sup>
2	比例	19%	18%	16%	18%	22%	13%
	總時	148	116	91	180	180	80
3	比例	18%	16%	14%	20%	22%	13%
	總時	148	113 <sup>d</sup>	91	200	180	107
4	比例	13%	16%	14%	20%	20%	13%
	總時	148	113 <sup>d</sup>	91	200	180	107
5	比例	13%	16%	13%	20%	20%	13%
	總時	148	113 <sup>d</sup>	91	200	180	107
6	比例	15%	16%	13%	20%	17%	13%
	總時	139	113 <sup>d</sup>	91	200	150	107
7	比例	15%	11%	12%	18% <sup>i</sup>	17%	13%
	總時	139	88 <sup>c</sup>	102	187	150	120
8	比例	11%	11%	12%	13%	17%	13%
	總時	111 <sup>b</sup>	88 <sup>c</sup>	102	140	150	120
9	比例	11%	11%	9%		14%	13%
	總時	111 <sup>b</sup>	88 <sup>c</sup>	77		150	150
10	比例	12% <sup>c</sup>	13%	11%			14% <sup>q</sup>
	總時	120	126 <sup>f</sup>	113			167

以上表格只比較必修部分的數學課程，一旦開始分流或選修，就應該改變一種比較的基準：亦即應該比較各國提供數學選修課程的數量、內容豐富性與多樣性，以及選修制度的彈性。這些議題都在內文中有所介紹。因此，各國最多只統計到 10 年級。新加坡和美國更早結束數學必修課程，所以分別只列到 8 年級和 9 年級。

比例：每學年數學課節數，占全年所有學校制定節數之百分比

總時：每學年數學授課時數，單位：Hour

a：以中國五四制為準

b：中國初中即有選修課未計入

c：中國高中課程以實驗方案之『最低標準』統計

d：日本有總合學習時間，影響實際數學時數

e：日本有選修課和總合學習時間，影響實際數學時數

f：日本在 10 年級（高一）有一學年 3 學分的必修課程，表格內只記了這一項。但是其實日本的高一學生還可能再選一門數學選修，那就會每週增加三節數學課。

g：韓國課時以其教育部英文網站之公告為準。那可能是最低要求。在韓文的課程實施文件中，看到各校可以安排『彈性授課時數』給需求量較大的科目，以那些每週平均授課三節以上的科目為原則。如果讓數學課每週使用一節彈性時數，則小學期間每年總時數增加 22 小時（4%），初中時期每年增加 25 小時（3%），而高一增加 28 小時（2.7%）。其實韓國的實況跟台灣非常相近，各校實際授課的時數，並不見得是政府要求的數學課時。

h：新加坡 1--6 課時是從某些公立小學的實際課表得來

i：新加坡 7--10 課時是從某些快捷或正規類公立學校的實際課表得來

j：新加坡並無普通高中以對應 11--12 年級

k：美國各地的差異很大，請留意調查的地區性

m：以台灣官方公告標準計算，沒考慮實際狀況

n：台灣 1--9 年級依九年一貫課程標準估計

p：台灣 1--9 年級依領域時間之最高比例（15%）估計

q：台灣 10--12 年級依民 85 年公告《高級中學課程標準》計算