

論高等微積分的課程定位

陳宜良 2014.3.8

高等微積分在台灣一直被定位為數學系的入門課，是理論性的微積分，後續許多課要用到的概念及專有名詞都在這門課中教授。在過去，高微擋修複變、幾何，以及任何高階的分析課程，同時也影響到低階的微分方程與偏微分方程的學習。另外高微也是抽象思維與嚴謹證明訓練的關鍵課程，同時也訓練學生相對應的數學寫作。由於高微課程肩負這麼多功能，因此它的學分數最高，也是入門數學最重要的一門課。在台灣各大學通常都定位為數學系大二的必修課。而老師也常常透過這門課來判斷學生的數學天賦。

然而這門課從來就是學習成效不彰的一門課。在過去一個班級被當的比例超過 $2/3$ 是很平常的事。學生主科成績不好時，除了挫折外，也無法轉系，常浪費寶貴的青春光陰，也造成學習風氣的低落與老師教學的挫折。今日被當的學生較少，但常常只是因為老師要求標準降低。許多學生到了研究所，基本的數學論述與證明能力都有問題，數學是在一知半解中糊糊塗塗的學，這對人的整體發展非常不好。而這些現象在美國的數學系並非常態，美國人要繳高學費，那能接受這麼高的不及格率或是低的學習成效。因此我們有需要研究美國大學數學課程的設計，重新定位高微課程，提升學生學習成效。

國內高微教授的題材一般是以 W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*，或是 Marsden 與 Hoffman 的 *Elementary Classical Analysis* 為教材。Rudin 的內容為: 1. Real and Complex Number Systems, 2. Basic Topology, 3. Numerical Sequences and Series, 4. Continuity, 5. Differentiation, 6. The Riemann-Stieltjes Integral, 7. Sequences and Series of Functions, 8. Some Special Functions, 9. Functions of Several Variables, 10. Integrations of Differential Forms, 11. The Lebesgue Theory。Marsden&Hoffman 的內容為: 1. Introduction: Sets and Functions, 2. The Real Line and Euclidean Spaces, 3. Topology of Euclidean Space, 4. Compact and Connected Sets, 5. Continuous Mappings, 6. Uniform Convergence, 7. Differentiable Mappings, 8. The Inverse and Implicit Function Theorems, 9. Integration, 10. Fubini's Theorem and the Change of Variables Formula, 11. Fourier Analysis。這兩本書的核心內容是基礎的古典分析(Foundation of Classical Analysis)，在美國都是定位為數學系高年級學生的教科書。

我上網查美國知名大學數學系的課程網站，以前述兩本書之題材為課程內容的多是命名為數學分析，但確實也有一些學校命名為高等微積分，如 U. of Maryland、U. of Michigan、Rutgers University，但似乎較少。MIT 的 *Advanced Calculus for Engineers* 的內容是基本的複變，以及偏微分方程等，較偏我們所謂的工程數學。NYU 的博士資格考雖稱為 *Advanced Calculus*，但其內容實為 Courant and John 的 *Introduction to*

Calculus and Analysis。而 U. Maryland 與 U of Michigan 的 Advanced Calculus 的課號都是 4 字頭，應都是 4 年級或至少是高階的課程。我條列一些學校的相關課程如下。在表格中，我亦列出課號。各校課號編碼不同，表示修業年級的代碼，有些學校是以課號的第一碼表示，愈大代表愈高年級或愈深，如 Princeton, Cornell, Chicago, NYU, Maryland, Michigan, UBC 等。另一類是以位數表示修課年級，如 Harvard 的 Ma23 為兩位數字，Ma215 則為三位數字。二位數的課為二年級學，三位數的課則為三年級學。以位數表修課年級的學校有 Harvard, Berkeley, UCLA, Caltech 等。

| | | |
|--------------|--|--|
| Harvard | Ma23a,b Ma25a,b Ma55a,b Ma112 | Linear Algebra and Real Analysis Honors Linear Algebra and Real Analysis Honors Real and Complex Analysis Introduction to Mathematical Analysis |
| Princeton | Mat215 | Analysis in a Single Variable (Introductory proof-based course) |
| Cornell | Math3110 | Introduction to Analysis (upper level course) |
| U. Chicago | MATH 20300 -20400-20500 | Analysis in R^n I-II-III |
| UC Berkeley | 104 105 | Introduction to Analysis. (4), required Second Course in Analysis. (4), elective |
| UCLA | Mat131A,B | Analysis |
| Caltech | Ma108 abc | Classical Analysis |
| NYU | Math-UA 325, 326 | Analysis I, II |
| U. Maryland | MATH 310 MATH410, 411 | Introduction to Mathematical Proof (To prepare students for MATH410 Advanced Calculus) Advanced Calculus I, II |
| U. Michigan | Math451, 452 | Advanced Calculus I, II (upper level, similar to Maryland) |
| Rutgers Univ | Math 311 | Advanced Calculus I, II |
| MIT | Open course | Advanced Calculus for Engineers (Complex variable,...) |

下面我以哈佛與加州理工學院 (Caltech) 為例，詳細說明他們的基礎分析課程結構。在哈佛，微積分之後的分析相關課程有 Math 21, 23, 25, 55. 這些都是一學年的課程。Math21(a: Multivariable Calculus, b: Linear Algebra and Ordinary Differential Equations)，這是低階的課，通常由研究生授課。Math 23: Linear Algebra and Real

Analysis，這是有一些證明的課程，其相對應的 Honors 課程為 Math25 則有更多證明的要求。另外還有一門更具挑戰的課 Math55: Honors Real and Complex Analysis，這是給那些奧林匹亞生的課。選擇 Math Concentration 的學生擇其中之一即可。但有志數學的學生應要求到 Math23。如果學生原先修 Math21，後來想學數學，則建議修一學期的 Math112: Introduction to Mathematical Analysis，內容涵蓋到 Metric space, uniform convergence 等。哈佛數學系對這幾門課的定位與學生該如何選擇有詳細的說明，見“Harvard Mathematics Department 21, 23, 25, or 55?”。

<http://www.math.harvard.edu/pamphlets/freshmenguide.html>。我摘錄部分並翻譯如下。

Math21 a, b: 本課程完整處理(thorough treatment)多變量微積分及線性代數以它們在現實世界的應用，習題中多用數字，證明僅限於以例子做非嚴謹的說明(所謂 common-sense proofs)。授課對象為通過 AP Calculus BC 成績在高標以上(5 級距的 4 與 5)、喜歡高中形態的數學、對科學有興趣以及對數學應用很在乎的學生。

Math23 a,b: 本課程涵蓋線性代數與多變量微積分，同時也從最基礎的地方教證明寫作。習題仍以數字為主，但也會有高等數學中所用的形式語言。許多同學發現與程度相近的同學共同學習，收穫最多。授課對象為通過 AP Calculus BC 成績在高標以上(5 級距的 4 與 5)，想學一些證明並且未來可能想主修數學。

Math25 a,b: (honors) 本課程嚴謹且完整地處理多變量微積分、線性代數，並介紹一些高等數學的課題，它是學習高等數學的跳板。本課程進度快，例題較屬非具體，而是較理論傾向，有學過證明、或線性代數、或多變量微積分會有幫助，但非必要。真正必要的是對數學有狂熱的追求。授課對象為通過 AP Calculus BC，對數學非常有興趣、希望在勤學下追上班上最好的同學。

Math55 a,b: 這門課恐怕是全美最困難的大學部的數學課，它涵蓋許多高等數學課題，習題常是要求學生證明分析、線性代數的基本定理，許多習題可能需要 24-60 小時完成。本課程要求要有完整的多變量與線性代數的先備知識。過去在這課門收穫多的學生多是已有很多高等數學的背景知識，並且熟練證明寫作。這門課常有許多數學奧林匹克競賽的學生。授課對象為那些想主修數學、挑戰自己極限，並且已有相當數學基礎的學生。

Math112: 這是一學期的課，介紹數學分析以及微積分背後的理論，重點是學習證明。內容包括距離空間的極限與連續性，均勻收斂函數空間、黎曼積分。先備課程為 Math 21a,b。

最後哈佛數學系給一些過去學生修習的一些經驗，我摘錄下來。

- 每一年都有一些學生會選一些超過他們程度的課，雖然他們很認真，也得了好的成績，但其中有許多同學表示，如果當時他們選擇一個較適合他們程度的課，應該會收獲更多。
- 選擇那一個課程並非是一個不可逆轉的決定，開學幾周後學生可以調整，而以證明為主的課程也會在內容上與其他課協調，使學生可以順利轉班。Math 55 還提供前測，以讓學生了解他們是否有足夠的背景知識可以從此門課真正學到東西。
- 最後你的選擇並不會影響你選擇數學主修。如果你選擇 Ma21，也許你要自修數學證明寫作，或選修證明寫作的課，如 Ma101。不過你學高階數學的能力和那些選擇 Ma23 的學生是沒有差別的。

哈佛在課程設計上十分細膩，以學生為本，設計出適合不同性向、不同成熟度的學生。鼓勵學生挑戰，但也提醒學生選擇適合自己程度的課，由以前學生修課的經驗來看，選擇合適程度的課可能學到更多。另外哈佛也鼓勵學生以小組方式合作學習，不要單打獨鬥。

下面我以 Caltech 作為比較對象。

1. Caltech 的基礎分析課是稱為 Classical Analysis，課號 Ma108abc(3-0-6)，是設計在大三學習。是數學以及計算+數學科學系的必修課。3-0-6 表示每周上課 3 小時，無實驗課，課外作業時間為 6 小時。每一學季 10 周，共 abc 3 學季。Ma108 表示其為數學系 3 位數的高階課。內容為: First term: structure of the real numbers, topology of metric spaces, a rigorous approach to differentiation in \mathbb{R}^n . Second term: brief introduction to ordinary differential equations; Lebesgue integration and an introduction to Fourier analysis. Third term: the theory of functions of one complex variable. 所以前兩個學季與我國高微相當。學生總共花費 $9 \times 10 \times 2 = 180$ 小時學習這些 Classical Analysis。我國高微的標準課本是 Rudin 的 Principle of Mathematical Analysis。課程每周 4 小時，上下學期合起來共 36 周。另外我們有演習課，通常是每周 2 小時。如果學生是認真的，每周應再花至少 4 小時，因此每周共應花 10 小時，全年應花 360 小時，而 Caltech 學生按規劃只花 180 小時。
2. 下面看看 Caltech 學生修 Classical Analysis 的前置經驗。Caltech 的新生要求已學過一年的微積分，即所謂 AP (Advanced Placement) Calculus AB 與 BC 程度。但入學後仍要再修一年的微積分，程度是 Apostol 的微積分，是用 $\epsilon\delta$ 的嚴謹論証語言。更關鍵的是大部份學生在大二時必修應用數學方法導論，內容為複變、常微分方程與線性偏微分方程，大約就是工程數學的內容。這是唯一一門每周上 4 小時、作業 8 小時(4-0-8)的課。學生在其中獲得許多具體例子與操作的經驗，而這門課也幾乎

是全校共同的必修或選修課。因此學生上 **Classical Analysis** 時，其具象的經驗，計算的能力均已相當成熟，再學抽象且嚴謹的古典分析，自然水道渠成。

我國高微課放在大二學習是過去過早就分專業的習慣，常將高階課程提前到低年級學。這種學習法在邏輯順序上並不會造成問題，因為所有理論都是由公理出發，一步一步向上建構。但是半個世紀的實驗結果仍有下列問題：

1. 多變元微積分(或是向量微積分)學習不足。由於美制的微積分有 3 學期(如 Harvard 有 **Ma1a, Ma1b Calculus** 再加上 **Ma21a Multivariable Calculus**)。這是普遍性的設計，而名校的學生入學時多半已通過 **AP Calculus AB** 或 **BC** 等級的檢定。反觀我們的學生大部分在入學前僅學小部份微積分，而微積分學習僅有 2 學期，因此大一下學期的向量微積分的學習進度很趕，學生常常學得並不紮實。在大二學高等微積分時，主要心力放在單變元微積分，並未有機會學習或使用多變量微積分。直到大三的幾何與偏微分方程課中才能用到，學習時機並非最佳設計。而多變量微積分是幾何、偏微分方程，以及許多自然科學與社會科學課程的基礎。向量微積分學習的薄弱使學生喪失許多機會。
2. 學生學習抽象分析(高等微積分)的前置經驗不足。許多學生不論在具體的例子、稍複雜的計算、以及簡單的推理等經驗都不足的情況下，就去學抽象分析，其學習動機不足、學習坡度過陡，常常造成學習挫折。而部份思想未成熟的學生，被訓練成過度小心翼翼，妨礙了他創造性思維的發展。現在美國的微積分教科書與基礎分析課的落差也很大，中間填補的是較具體的應用數學課程(如 **Caltech**)，或微分方程相關課程，也有一些學校開設數學證明(**Mathematical Proof**)這門課，如 **UBC(221)**，**NYU (Math-UA125)**，**U Maryland (Math310)**，或是 **Mathematical Writing** 的課程(**Caltech**)，作為低階數學課與分析課的銜接課程。
3. 實變是高微的後續課程，要到研究所一年級才接續，依現制中間有兩年的空檔，時間拖得太久了。

我具體的建議是

1. 將高微改稱分析導論(**Introduction to Analysis**)。傳統高微課在美國比較多稱為分析。我們將此課名稱作高微，放在大二學習，可能會遭誤解為多變量微積分，而後續又無分析課程，對學生將來申請學校並不有利。
2. 分析導論 I,II 的內容大致為 **Rudin** 或 **Marsden** 的範圍，可以不含第 10 章 (**Integration of Differential Forms**)，但仍為(4,4)學分的設計，上學期定位為 **Analysis in Single Variable**，要介紹到 **Sequence of functions**，下學期要教到 **Lebesgue** 積分，上學期為必修，下學期可以為選修，對將來不從事數學工作的學生、或是其他學系的學生，不見得必要學一年的內容，但如果將來要走數學研究的路，則需要全年的內容，因此純數學的研究所考試應該要考全年的內容。應數

、統計等研究所則必考一學期的內容。

3. 允許學生可在大二或大三學分析導論。如果學生選擇在大三學，則大二上可學向量微積分(Vector Calculus)，大二下可學偏微分方程導論。這兩門課可以讓學生看到具體實例與獲得充分的計算訓練，學生到三年級時應比較成熟，可以順理成章的學分析導論，而之後也可以接實分析。
4. 對一些學習超前的學生，可以仿美國的制度，開設分析導論(優) (Honors Introduction to Analysis)，如 Harvard 的 Math25 或 甚至 Math55 的設計，不設限修課年級，讓學生挑戰。但也應同哈佛一樣，告知學生他需投資大量的心力在這一門課，可能會失去學習其他課程的機會。
5. 二年級分析相關課程以操作性為主，但其內容要兼顧到其他二年級課程所需的背景知識。其中微積分要涵蓋瑕積分，向量微積分要涵蓋反函數、隱函數定理。而偏微分方程中常用到的級數也只能直觀的交待。複變是另一門連帶受到影響的科目。如果按現行內容教(比較強調嚴謹的分析)，則需要放在分析導論 I 之後學習，安排在下學期較恰當。隔年的上學期則再安排一門複分析的課，對要學數論或複分析的學生有幫助。但如果複變是安排在上學期，則內容與深度要調整，要改成操作性的方式教，不能以分析方式來教，但這一類的教科書很多，應不是問題。